

Dr Miodrag Popović

Dr Milan Ponjavić

Osnovi analogne elektronike

za studente računarskih usmerenja

Elektrotehnički fakultet
Beograd, 2020.

Sadržaj

1.	UVOD	1.1
1.1	Šta je to elektrotehnika?.....	1.2
1.2	Oblasti elektrotehnike:	1.2
1.3	Šta je to elektronika?	1.3
2.	OSNOVNI POJMOVI O ELEKTRICITETU	2.1
2.1	Električno opterećenje - naelektrisanje	2.1
2.2.1	Elektrostatička (električna) sila - Kulonov zakon	2.2
2.2.2	Električno polje. Jačina električnog polja	2.3
2.2.3	Homogeno električno polje.....	2.5
2.2.4	Linje električnog polja (linije sile električnog polja)	2.5
2.2.5	Pojam električnog potencijala i napona. Rad u električnom polju	2.6
2.2.6	Energija kondenzatora	2.9
2.2.7	Provodnici u električnom polju.....	2.10
2.3	Konstantna električna struja.....	2.11
2.3.1	Pojam električne struje.....	2.11
2.3.2	Napon.....	2.12
2.3.3	Referentni smerovi i polariteti	2.12
2.3.4	Energija i snaga.....	2.13
2.4.	Osnovni pojmovi o magnetskom polju	2.14
2.4.1.	Pojam magnetskog polja i magnetske sile	2.14
2.4.2.	Lorencova sila.....	2.15
2.4.3.	Linije vektora B	2.15
2.4.4.	Izvori magnetskog polja.....	2.16
2.4.5.	Fluks vektora B	2.21
2.5.1.	Faradejev zakon i Lencovo pravilo. Induktivnost	2.25
2.5.2.	Transformatori	2.26
2.6.1.	Pojam idealnog električnog elementa	2.29
2.6.2.	Idealni pasivni električni elementi	2.29
2.6.3	Nezavisni električni izvori (generatori)	2.30
2.6.4.	Idealni zavisni (kontrolisani) električni izvori (generatori)	2.31
2.6.5.	Idealni nelinearni električni elementi.....	2.31
2.6.5.	Složene električne komponente	2.32
2.6.6.	Pojam mase	2.35
2.6.7.	Elementarne komponente sa tri priključka. Komponente sa implicitnom masom	2.36
3.	KOLA SA STALNIM JEDNOSMERNIM STRUJAMA.....	3.1
3.1	Omov zakon.....	3.1
3.2	Električno kolo.....	3.2
3.3	Prvi (strujni) Kirhofov zakon.....	3.2
3.4	Drugi (naponski) Kirhofov zakon.....	3.3
3.5	Paralelna i serijska veza otpornika.....	3.3
3.5.1	Serijska (redna) veza otpornika	3.3
3.5.2	Paralelna veza otpornika	3.4
3.6	Transformacije trougao – zvezda i zvezda - trougao	3.6
3.7	Algoritamsko rešavanje složenih kola	3.7
3.7.1.	Rešavanje direktnom primenom Korhofovih zakona.....	3.7

3.7.2. Metod potencijala čvorova.....	3.9
3.8 Linearna kola: principi superpozicije i homogenosti	3.11
3.9 Transformacija izvora.....	3.13
3.10 Tevenenova i Nortonova teorema.....	3.15
4. KALEM I KONDENZATOR U KOLIMA SA PROMENLJIVIM STRUJAMA	4.1
4.1 Kondenzator.....	4.1
4.2 Kalem.....	4.2
4.3 Kola prvog reda sa kondenzatorima i kalemovima.....	4.3
4.4 Kola drugog reda sa kondenzatorima i kalemovima	4.13
5. KOLA SA NAIZMENIČNIM STRUJAMA.....	5.1
5.1 Prostoperiodični režim, osnovni pojmovi	5.2
5.2 Predstavljanje prostoperiodičnih veličina kompleksnim brojevima	5.6
5.3 Opis elemenata kola pomoću fazora	5.8
5.4 Uopšteni Omov zakon: impedansa i admitansa	5.9
5.5 Snaga koja se razvija na proizvoljnom elementu	5.12
5.6 Kirhofovi zakoni u kolima sa naizmeničnim strujama	5.15
5.7 Osnovne transformacije u kolima sa naizmeničnim strujama.....	5.15
5.7.1 Serijska (redna) veza impedansi	5.16
5.7.2 Paralelna veza impedansi	5.17
5.7.3 Transformacije trougao – zvezda i zvezda - trougao	5.18
5.7.4 Transformacije izvora u kolima sa naizmeničnim strujama.....	5.18
5.8 Sistem jednačina napona čvorova za kola sa naizmeničnim strujama	5.19
5.9 Tevenenova i Nortonova teorema za kola sa naizmeničnim strujama	5.20
5.10 Kola sa jednim i dva pristupa u kompleksnom domenu	5.23
5.11 Analiza kola u ustaljenom složenoperiodičnom režimu	5.26
6. OSNOVI FIZIKE POLUPROVODNIKA	6.1
6.1 Osnovni pojmovi o provodnosti materijala.....	6.1
6.2 Elektronska struktura materijala	6.2
6.3 Silicijum kao poluprovodnik	6.3
6.4 Dopiranje silicijuma primesama	6.4
7. PN SPOJ	7.1
7.1 Nepolarisani pn spoj	7.1
7.2 Direktno polarisani pn spoj.....	7.2
7.3 Inverzno polarisani pn spoj.....	7.3
7.4 Proboj <i>pn</i> spoja i Zener dioda.....	7.4
7.5 Strujno naponska karakteristika i modeli diode	7.4
7.5.1 Nelinearni model diode.....	7.4
7.5.2 Idealna dioda.....	7.5
7.5.3 Izlomljeno linearni model diode	7.5
7.5.4 Model diode sa konstantnim padom napona	7.6
7.5.5 Karakteristika Zenerove diode i modelovanje	7.7
7.5.6 Model diode za male signale.....	7.8
7.6 Radna tačka diode.....	7.8
7.7 Primene i vrste dioda	7.9

8.	BIPOLARNI TRANZISTOR (BIPOLAR JUNCTION TRANSISTOR - BJT).....	8.1
8.1	Struktura i simboli bipolarnog tranzistora	8.1
8.2	Rad bipolarnog tranzistora u aktivnom režimu i zasićenju	8.3
8.2.1	Model <i>n_{pn}</i> tranzistora za velike signale u aktivnom režimu.....	8.5
8.2.2	Erlijev efekat.....	8.6
8.2.3	Model tranzistora za male signale.....	8.7
8.2.4	Model tranzistora za velike signale u režimu zasićenja	8.9
8.2.5	Probojni naponi.....	8.10
8.3	Polarizacija tranzistora.....	8.10
8.3.1	Statičke karakteristike tranzistora	8.11
8.3.2	Podešavanje MRT. Određivanje parametara za mali signal.....	8.14
8.3.3	Podešavanje MRT sa jednom baterijom za napajanje i stabilizacija MRT	8.18
8.4	Osnovna pojačavačka kola sa jednim tranzistorom	8.19
8.4.1	Pojačavač sa zajedničkim emitorom	8.19
8.4.2	Pojačavač sa zajedničkim kolektorom	8.22
8.4.3	Pojačavač sa zajedničkom bazom	8.24
8.4.4	Pojačavači sa PNP tranzistorima	8.25
9.	MOS TRANZISTOR (MOSFET)	9.1
9.1	Struktura i simboli MOS tranzistora	9.1
9.2	Princip rada NMOS tranzistora.....	9.2
9.2.1	Ponašanje NMOS tranzistora pri malim naponima V_{DS}	9.3
9.2.2	Ponašanje NMOS tranzistora pri većim naponima V_{DS}	9.4
9.3	PMOS tranzistor i komplementarni MOS (CMOS).....	9.5
9.4	Model NMOS tranzistora za velike signale	9.6
9.4.1	NMOS tranzistor u zakočenju.....	9.6
9.4.2	NMOS tranzistor u triodnoj oblasti.....	9.6
9.4.3	NMOS tranzistor u zasićenju	9.7
9.4.4	Erlijev efekat.....	9.7
9.4.5	Ekvivalentna šema modela za veliki signal NMOS tranzistora	9.8
9.5	Model NMOS tranzistora za male signale	9.8
9.6	Osnovna pojačavačka kola sa NMOS tranzistorom.....	9.10
9.6.1	Pojačavač sa zajedničkim sorsom (ZS), polarizacija i pojačanje za mali signal	9.10
9.6.2	Pojačavač sa zajedničkim drejnom (ZD)	9.13
9.6.3	Pojačavač sa zajedničkim gejtom (ZG)	9.13
10.	SLOŽENA POJAČAVAČKA KOLA.....	10.1
10.1	Strujni izvori	10.1
10.2	Pojačavač sa dinamičkim (aktivnim) opterećenjem.....	10.3
10.3	Diferencijalni pojačavač	10.4
10.4	Strujni izvori i aktivna opterećenja u bipolarnoj tehnologiji.....	10.7
10.5	Višestepeni pojačavači.....	10.13
11.	OPERACIONI POJAČAVAČ I PRIMENE	11.1
11.1	Prenosna karakteristika operacionog pojačavača.....	11.2
11.2	Negativna povratna sprega.....	11.3
11.3	Primene operacionog pojačavača.....	11.5
11.3.1	Invertujući pojačavač.....	11.5
11.3.2	Neinvertujući pojačavač.....	11.6

11.3.3	Jedinični pojačavač	11.7
11.3.4	Kolo za sabiranje	11.7
11.3.5	Kolo za integraljenje	11.8
11.3.6	Diferencijator	11.9
11.3.7	Diferencni pojačavač	11.10
11.3.8	Instrumentacioni pojačavač	11.12
12.	OPERACIONI POJAČAVAČI SA JEDNOSTRUKIM NAPAJANJEM	12.1
12.1	Problem napona srednje vrednosti kod operacionih pojačavača sa jednostrukim napajanjem	12.1
12.2	Analiza problema rada sa jednostrukim napajanjem	12.4
12.3	Algoritamsko generisanje kola sa jednostrukim napajanjem	12.6
12.4	Pregled postupka projektovanja pojačavača sa jednostrukim napajanjem.....	12.17
13	LITERATURA	

Predgovor

Ovo izdanje udžbenika nastalo je na osnovu iskustva u izvođenju nastave u prethodnih 14 godina na dva predmeta Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu i pevažodno je namenjeo upravo tim predmetima:

- Osnovi elektronike, koji se predaje na prvoj godini studijskog programa Softversko inženjerstvo
- Osnovi analogne elektronike, koji se predaje na trećoj godini odseka za Računarsku tehniku i informatiku, studijski program Elektrotehnika i računarstvo

Iako elektronika nije uža specijalnost studenata računarskih usmerenja, realni tehnički problemi sa kojima se mogu susresti u budućoj inženjerskoj praksi su često veoma složeni i njihovo rešavanje zahteva učešće inženjera iz različitih oblasti nauke i tehnike, organizovanih u adekvatne razvojne timove. U takvim uslovima inženjer koji je specijalizovan za određenu oblast neizostavno treba da saraduje sa stručnjacima drugih specijalnosti. Da bi se olakšala saradnja inženjera različitih specijalnosti potrebno je da svaki od njih dovoljno poznaje srodne oblasti tehnike kako bi razumeo probleme i ograničenja u rešavanju problema u celini. Zbog toga se i u svetu, prilikom obrazovanja inženjera, uvek proučavaju i oblasti koje na prvi pogled nisu direktno u vezi sa odabranom specijalizacijom.

Ovaj udžbenik, kao i kursevi koji su u korelaciji sa njim, namenjeni su da studente kojima će primarna specijalizacija biti pisanje softvera za razne vrste programabilnog hardvera, upoznaju sa osnovima elektrotehnike i elektronike, sa ciljem da:

- bolje razumeju kako funkcionišu složeni elektronski sistemi sa kojima će se sretati u praksi,
- da u složenijim projektima efikasno komuniciraju sa inženjerima iz drugih struka
- i kako bi mogli da samostalno projektuju ili koriste jednostavnije IoT komponente.

Kako su navedeni predmeti orijentisani pre svega obogaćivanju profesionalne inženjerske pismenosti studenata računarskih usmerenja na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, autori su se trudili da se fokusiraju na osnovne informacije i principe koji mogu biti korisni u svakodnevnoj inženjerskoj praksi.

Iz razloga bolje pristupačnosti izložene materije, čitaocu koji nije izabrao elektroniku kao užu struku, i koji ne mora da ima značajno predznanje, rukopis udžbenika je pisan sa minimumom potrebne formalnosti i strogosti, bez gubitka inženjerske upotrebljivosti obrađenih tema.

U odnosu na skriptu koja je osnova ovog udžbenika, i koja je navedena pod rednim brojem 1 u literaturi, pojedine nastavne teme su dodate a neke su samo proširene u cilju jasnijeg izlaganja materije. Teme koje prevazilaze okvire pomenutih kurseva zadržane zbog kompletnosti udžbenika, i označene su kao opcione. Najvažniji pojmovi koji se obrađuju u udžbeniku ispraćeni su jednostavnim primerima, a u sklopu udžbenika nalazi se i određen broj ilustrativnih primera koji su po strukturi složeniji.

Neke od opcionih tema koje se ne obrađuju tokom nastave, nalaze se u nastavnom programu većine srednjih škola. Iako nisu obavezne, one se preporučuju čitaocima koji primete da im srednjoškolsko predznanje nije dovoljno za neometano praćenje obaveznih nastavnih tema. Za pojedine pojmove i fizčke veličine, kao sto su na primer električna struja,

naelektrisanje, provodnik, otpornik, električna komponenta, kratak spoj, i sl, pretpostavlja se minimalno razumevanje ili bar intuitivna predstava. Takva pretpostvka je zanovana na kursovima iz fizike ili srodnih tehnički orijentisanih predmeta koji se drže u osnovnoj i srednjoj školi.

Možda će neke od tema čitaocu koji je iskusan inženjer elektrotehnike izgledati suviše za budućeg softverskog inženjera, kao što su na primer tranzistorski pojačavači i modelovanje za mali signal. Ipak preovlađujuća praksa na svetskim univerzitetima je da se te teme predaju čak i na elementarnim kursovima elektronike. Sa druge strane može da deluje da su neke bitne teme samo površno obrađene ili da su čak potpuno izostavljene, ali treba imati u vidu da je odabir tema nastao kao kompromis između sadržaja koje bi bilo poželjno ispredavati i raspoloživog fonda časova.

Autori su se trudili da prilikom preloma teksta udžbenika greške svedu na minimum. Ipak, svaki rad neminovno prate greške, stoga će autori biti zahvalni na svaku dobronamernu sugestiju u cilju korekcija ili poboljšanja upotrebljivosti udžbenika.

U Beogradu,
Decembar 2020.

Autori

1. Uvod

U savremenom svetu svedoci smo da pametni električni ili elektronski uređaji prodiru u sve oblasti života. Automobili imaju elektronske uređaje za nadzor i upravljanje koji mogu biti povezani na Internet, uređaji bele tehnike u domaćinstvu imaju sve više elektronskih funkcija koje mogu biti kontrolisane preko mobilnog telefona, mobilni telefoni su sada moćni višeprosesorski računari i napravili su revoluciju u telekomunikacijama, uvođenje računara na svakom koraku je promenilo način života, itd. Taj trend je usko povezan sa konektivnošću na Internet, i popularno se naziva Industrijska revolucija 4.0, a skup koncepata na kojima je zasnovan naziva se Internet stvari (Internet of Things – IoT).

Bazu Interneta stvari čine pametni senzori koji često predstavljaju mali računar osposobljen za komunikaciju, okružen pratećom elektronikom. Iako je najsloženija komponenta senzora upravo mali računar – mikrokontroler, bez prateće elektronike senzor je besmislen. Za ilustraciju može da posluži najjednostavnija elektronska komponenta – otpornik.

Primeri upotrebe otpornika:

- Dugmad za podešavanje jačine zvuka, osvetljaja itd, mogu se realizovati pomoću promenljivog otpornika – potenciometra.
- Detekcija osvetljenja – koristi se foto-otpornik koji menja otpornost u zavisnosti od intenziteta svetla.
- Merenje temperature – koristi se otpornik koji menja otpornost sa promenom temperature.
- Grejanje – grejači su otpornici male vrednosti i velike snage.
- LED osvetljenje –svaki LED mora da ima otpornik za definisanje struje.
- Itd...

Naravno, kao i za otpornik, tako i za ostalne elementarne elektronske komponente moguće je navesti veoma veliki broj primena, kako senzorskih, tako i aktuatorskih. Stoga je za produktivno programiranje i upotrebu pametnih senzora neophodno elementarno poznavanje elektronike i srodnih disciplina.

1.1 Šta je to elektrotehnika?

Elektrotehnika je tehnička nauka koja obuhvata primene elektromagnetskih veličina za zadovoljavanje potreba društvene zajednice. Postoje dve glavne primene elektriciteta:

- *Proizvodnja, prenos i distribucija električne energije kao robe* po različitim geografskim lokacijama, ili
- *Prenos i obrada informacija.*

Elektrotehnika je oblast koja se izdvojila iz fizike i poslednjih 150 godina se stalno i dinamično razvijala. O razvoju elektrotehnike svedoči stalna pojava novih podoblasti kao i broj naučnih i stručnih publikacija iz elektrotehnike koji u velikoj meri prevazilazi obim sličnih publikacija iz drugih oblasti tehnike.

1.2 Oblasti elektrotehnike:

Osnovno jezgro elektrotehnike se tradicionalno deli na sedam specijalizovanih podoblasti:

1. Elektroenergetika
2. Elektromagnetika
3. Komunikacije
4. Računarsko inženjerstvo
5. Sistemsko inženjerstvo
6. Automatsko upravljanje
7. Elektronika

Elektroenergetika se bavi proizvodnjom i prenosom električne energije sa jedne lokacije na drugu i najstarija je elektrotehnička specijalnost. Ceo razvoj savremenog društva zavisi u kritičnoj meri od potreba za električnom energijom za napajanje električnih uređaja u domaćinstvu i industriji. Zato su za proizvodnju električne energije razvijeni razni sistemi za pretvaranje drugih oblika energije (toplotne, hidromehaničke, nuklearne, solarne, energije vetra, elektrohemijske, ...) u električnu energiju.

Elektromagnetika premošćava jaz između primena elektrotehnike za prenos energije i ostalih disciplina koje su uglavnom vezane za prenos informacija. Ona se bavi proučavanjem i primenom električnog polja, magnetskog polja i struje. Električna struja može biti uvek istog smera (*jednosmerna struja*) ili promenljivog smera (*naizmjenična struja*). Kod naizmjeničnih struja definiše se pojam *učestanosti* ili *frekvencije*, koja predstavlja broj promena smera struje u sekundi. Jedinica za frekvenciju je Herc (Hz). Opseg učestanosti koji se sreće u praksi je veoma širok. U elektroenergetici se koriste naizmjenične struje učestanosti 50 Hz ili 60 Hz, dok se u drugim oblastima koriste znatno više učestanosti, čak do 10^{11} Hz. Na višim učestanostima počinje zračenje iz kablova i kroz atmosferu se prostiru elektromagnetski talasi. Ovakvi talasi su omogućili pojavu radija, televizije, bežičnih komunikacija, radara, itd.

Komunikacije ili *telekomunikacije* su podoblast elektrotehnike koja se bavi prenosom informacija sa jednog mesta na drugo. Informacije se prenose pomoću električnih provodnika, elektromagnetskih talasa, klasičnim kablovima, optičkim kablovima, itd. Jedan od važnih problema koji se rešava u komunikacijama je način na koji se informacije utiskuju u električni signal. Taj proces se naziva modulacija ili kodovanje i obavlja se na predajnoj strani, dok se na prijemnoj strani obavlja inverzni proces koji se naziva demodulacija ili dekodovanje. U procesu prenosa nastaje i degradacija signala zbog dejstva smetnji ili šuma pa se u komunikacijama

velika pažnja posvećuje metodima za izvlačenje korisnih informacija iz šuma i metodima za zaštitu informacija. Većina ovih metoda zahteva upotrebu računara.

Računarsko inženjerstvo je jedna od podoblasti elektrotehnike koje se bavi razvojem i projektovanjem računarskog hardvera i softvera koji kontroliše njegov rad. Savremeni računarski sistemi mogu biti veoma različiti, počev od jednostavnih mikrokontrolera koji obavljaju jednostavne nadzorne funkcije, preko personalnih računara i radnih stanica koji se koriste za obavljanje raznovrsnih aplikacija, slušanja muzike, gledanje filmova i igru, pa do moćnih superračunara za izvršavanje kompleksnih proračuna u fizici, meteorologiji i istraživanju svemira.

Sistemi su oblast *sistemskog inženjerstva* se bavi modelovanjem kompleksnih sistema matematičkim modelima u cilju njihovog jednostavnijeg opisa i predviđanja njihovog ponašanja. Primeri takvih sistema su, na primer, modelovanje saobraćaja ili modelovanje leta aviona. Takav matematički opis sistema omogućava jednostavniju analizu ponašanja sistema u raznim uslovima bez izvođenja eksperimenta.

Automatsko upravljanje u sistemima je takođe jedna od važnih oblasti elektrotehnike koja se bavi upravljanjem raznim elektromehaničkim i drugim složenim sistemima uz pomoć odgovarajućih modela i algoritama za reagovanje u različitim situacijama.

1.3 Šta je to elektronika?

Oblast *elektronike* se bavi proučavanjem i konstrukcijom elektronskih elemenata kojima se kontroliše tok struje i povezivanjem takvih elemenata u složena kola koja obavljaju željenu funkciju. Osnovni elementi savremene elektronike su diode i tranzistori koji se povezuju u diskretna ili integrisana kola. Pored toga, elektronika se bavi i projektovanjem elektronskih kola za određene namene, razvojem algoritama za projektovanje, razvojem i primenom računarske podrške procesu projektovanja, implementacijom elektronskih kola koja realizuju razne metode potrebne u ostalim oblastima elektrotehnike, itd.

Mada je oblast elektronike stara već oko 100 godina, ona je u toku svoje istorije imala izuzetno dinamičan razvoj, a takva je i danas. Usled razvoja tehnologije stalno se pronalaze novi materijali i konstruišu nove komponente, što u velikoj meri utiče na promenu postupaka projektovanja. Već dvadesetak godina je prisutan trend minijaturizacije komponentata i trend integracije velikog broja komponentata u jedno integrisano kolo. To je omogućilo drastično smanjenje dimenzija elektronskih uređaja, smanjenje njihove potrošnje, povećanje brzine rada i povećanje pouzdanosti uređaja. Na primer, jedan od prvih elektronskih računara ENIAC iz 1947. godine koji je imao oko 17000 elektronskih cevi i memoriju od svega nekoliko kB, bio je smešten u prostoriju veličine sportske sale, a njegova potrošnja se merila desetinama kW. Današnji računari imaju sve važne performanse najmanje 1000 do 10000 puta bolje. Drugi karakterističan primer je mobilni telefon koji je pre samo dvadesetak godina, za neuporedivo lošije performanse, imao veličinu koja je jedva mogla da stane u automobil.

2. Osnovni pojmovi o elektricitetu

Poznato je da pojedina tela mogu da budu naelektrisana - da poseduju *električno opterećenje (naelektrisanje)*, i da ta osobina prouzrokuje mnoge efekte koji su vredni izučavanja i eksploatacije. Za nepokretno naelektrisanje često se koristi termin *statičko naelektrisanje*, a za pokretno naelektrisanje termin *električna struja*.

2.1 Električno opterećenje - naelektrisanje

Električno opterećenje – naelektrisanje je fundamentalno svojstvo materije, pri čemu je najjednostavnije tumačenje da je naelektrisanje forma unutrašnje strukture supstancije. Naelektrisanje može biti i pozitivno i negativno, pri čemu je nosilac najmanjeg mogućeg negativnog naelektrisanja elektron i iznosi -1.602×10^{-19} C. Vredno je napomene da je proton jedna od elementarnih čestica koja je nosilac pozitivnog kvanta naelektrisanja. Moduo električnog opterećenja jednog elektrona se naziva i *elementarno naelektrisanje* ili *kvant naelektrisanja*. U elektrotehnici baratamo sa mnogo većim naelektrisanjima, pa iz tog razloga smatramo da je svako praktično naelektrisanje beskonačno deljivo na manja naelektrisanja.

Uprošćena struktura atoma se sastoji od pozitivnog jezgra koje sadrži protone i u većini slučajeva neutrone, i elektrona koji kruže oko jezgra po različitim orbitama. U normalnim okolnostima broj protona jezgra je kompenzovan istim brojem elektrona, pa je atom električno neutralan. Međutim, pošto se elektroni iz najudaljenijih orbita mogu na razne načine odvojiti od atoma, atom može imati deficit elektrona - kaže se da je pozitivno naelektrisan (tada se naziva *jon*). I joni i elektroni se pod određenim uslovima mogu kretati i formirati električnu struju.

Ako celo telo pored neutralnih sadrži i atome sa deficitom elektrona onda i celo telo ima deficit elektrona - kaže se da je pozitivno naelektrisan. U suprotnom, ako celo telo pored neutralnih sadrži i atome sa viškom elektrona onda i celo telo ima višak elektrona - kaže se da je negativno naelektrisan.

Fizička veličina kojom se kvantifikuje naelektrisanje naziva se količina naelektrisanja, uobičajeni simbol je q , a jedinica je Kulon (C). Iako je gramatički nepravilno, u literaturi se često za količinu naelektrisanja koristi samo imenica *naelektrisanje*, pa se čak i za naelektrisanu česticu koristi imenica *naelektrisanje*. Srećom ne može doći do zabune jer je uvek prisutna merna jedinica i jasan kontekst upotrebe.

Unutar atomske strukture nekog elektrotehničkog materijala, nosioci naelektrisanja mogu imati različitu pokretljivost. Na osnovu pokretljivosti nosilaca naelektrisanja, razlikuju se tri osnovne vrste elektrotehničkih materijala:

- Materijal kod kojeg su elektroni lako pokretljivi naziva se *provodnik*. Tipični provodnici su metali: srebro, zlato, bakar, aluminijum, itd. Kod metala elektroni iz spoljašnjih orbita atoma mogu lako napustiti atome. Takvi elektroni se nazivaju *slobodni elektroni* i oni omogućavaju lako uspostavljanje električne struje.
- Materijal kod kojeg su elektroni slabo pokretljivi naziva se *izolator* ili *dielektrik*. Tipični izolatori su nemetali: staklo, plastične mase, keramika, guma, itd. Naelektrisanje koje se dovede na izolator ostaje nepokretno i naziva se *statički elektricitet*. Dielektrični materijali se često koriste za izolovanje provodnika da bi se sprečio kratak spoj i uspostavljanje destruktivne struje između njih.
- *Poluprovodnici* su takvi materijali koji se pod određenim fizičkim okolnostima mogu ponašati i kao provodnici i kao izolatori, što je jako bitno za algoritamsko kontrolisanje i upravljanje strujom, naponom i električnom energijom. Najvažniji poluprovodnici su

silicijum, germanijum, galijum arsenid, itd. Poluprovodnički materijali su osnov savremene elektronike.

Fizičke veličine kojima se opisuje mera suprotstavljanja kretanju nosilaca elektriciteta kroz elektrotehničke materijale su *otpornost* i *provodnost*, i biće kasnije kvantitativno definisane. Provodnici imaju malu otpornost, dok izolatori imaju veliku otpornost. Na primer, otpornost bakra je oko 10^{25} puta manja od otpornosti kvarca istih dimenzija.

2.2 Osnovi elektrostatike

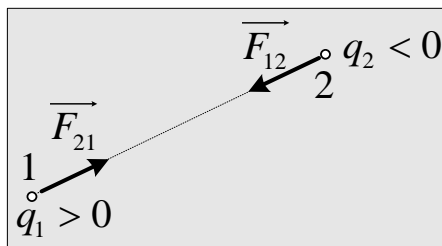
Deo elektrotehnike koji se bavi interakcijom nepokretnih naelektrisanih tela i zakonitostima koje tu vladaju, naziva se elektrostatika.

2.2.1 Elektrostatička (električna) sila - Kulonov zakon

Intenzitet sile u vakumu između dva nepokretna naelektrisana tela, koja su dovoljno mala u odnosu na njihovo rastojanje (pa se nazivaju i *tačkasta naelektrisanja*), opisana je sledećom jednačinom:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (2.1)$$

gde je ϵ_0 dielektrična konstanta vakuma q_1 i q_2 predstavljaju veličine naelektrisanja (u C), a r njihovo međusobno rastojanje (u m). Ova relacija se naziva *Kulonov zakon* u vakumu, a sila se zove i elektrostatička sila. Vektor sile je definisan prirodom naelektrisanja: ako su naelektrisanja istog znaka naelektrisanja se odbijaju, a ako su naelektrisanja suprotnog znaka naelektrisanja se privlače, što je ilustrovano na slici 2.1



Slika 2.1. Vektori sile: F_{12} je sila kojom telo 1 deluje na telo 2, a sila F_{21} je sila kojom telo 2 deluje na telo 1.

Fizička konstanta ϵ_0 se još naziva apsolutna dielektrična konstanta ili permitivnost vakuma, i to je fundamentalna konstanta definisana u **SI sistemu** kao $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m (Farada po metru). Ceo izraz $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ se može unapred izračunati i zameniti konstantom $(4\pi\epsilon_0)^{-1} = k = 8.99 \times 10^9$ Nm²/C².

Ukoliko se tela nalaze u sredini koja nije vakum, tada se umesto dielektrične konstante vakuma koristi dielektrična konstanta sredine koja iznosi $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, gde je ϵ_r relativna dielektrična konstanta te sredine i predstavlja meru odstupanja sredine od vakuma. Za vazduh i neke gasove važi da je $\epsilon_r \sim 1 \Rightarrow \epsilon \sim \epsilon_0$.

U tom slučaju je sila definisana sa

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|q_1q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{|q_1q_2|}{r^2} = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{|q_1q_2|}{r^2} \quad (2.2)$$

Primer 2.1.

Dva tela čije maksimalne dimenzije ne prelaze 1cm, nalaze se na rastojanju od 4m. Prvo telo sadrži višak od 10^9 elektrona dok drugo ima manjak od $2 \cdot 10^9$ elektrona.

- Kakvom i kolikom će silom delovati tela jedno na drugo ako se nalaze u vakuumu?
- Ukoliko se tela nalaze u sredini čija je relativna dielektrična konstanta jednaka 2, kolika je sila u tom slučaju?

Rešenje:

a) Naelektrisanje prvog tela iznosi $q_1 = -10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = -1.6 \cdot 10^{-10}$ C, dok je naelektrisanje drugog tela $q_2 = 2 \cdot 10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 3.2 \cdot 10^{-10}$ C.

Sila koja deluje između tela je privlačna zato što su naelektrisanja suprotnog znaka, a pošto su dimenzije tela mnogo manje od rastojanja između njih, može se smatrati da je u pitanju sila između tačkastih naelektrisanja, i ona iznosi

$$F_o = q_1q_2 / (4\epsilon_0\pi r^2) = 2,88 \cdot 10^{-11} \text{ N};$$

b)

$$F = q_1q_2 / (4\epsilon_r\epsilon_0\pi r^2) = F_o / \epsilon_r = 1,44 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

2.2.2 Električno polje. Jačina električnog polja

Fizičko polje je oblik materije i kao takvo predstavlja fundamentalni pojam u fizici. Klasična fizika poznaje 4 vrste polja u prirodi: polje jake sile, polje slabe sile, gravitaciono polje i elektromagnetsko polje. Električno polje je jedan od pojavnih oblik elektromagnetskog polja. Ako je električno polje posledica naelektrisanja koja se ne kreću, onda se kaže da se radi o elektrostatičkom polju. U nastavku ćemo se baviti takvim vidom električnog polja.

Opisna definicija električnog polja je da je ono posebna materijalnosti prostora u okolini naelektrisanih tela, koja se manifestuje u pojavi mehaničke sile koja deluje na probnu naelektrisanu česticu unesenu u taj deo prostora. Dakle, u okolini svakog naelektrisanog tela postoji električno polje. Jedna od fizičkih veličina kojom se opisuje električno polje je *jačina električnog polja* koja se definiše kao količnik sile koja deluje na probno tačkasto naelektrisanje i količine naelektrisanja Δq na njemu:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{na \Delta q}}{\Delta q} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (2.3)$$

Pravac i smer sile se poklapaju sa smerom sile koja deluje na probno tačkasto naelektrisanje, a jedinica je volt po metru.

Kada je u pitanju nepokretno tačkasto naelektrisanje q , ono u svojoj okolini stvara električno polje intenziteta:

$$E = k \frac{q}{r^2}, \quad (2.4)$$

tako da je sila koja deluje na probno tačkasto naelektrisanje u njegovoj okolini jednaka

$$F = \Delta q \cdot E = k \frac{q \cdot \Delta q}{r^2}. \quad (2.5)$$

U ovom slučaju vektor električnog polja je različit u svakoj tački prostora: ukoliko su tačke koje se porede na istom rastojanju od tačkastog naelektrisanja, intenzitet vektora E će biti isti ali neće biti isti pravac i smer; ukoliko se posmatraju tačke prave koja prolazi kroz tačkasto naelektrisanje, pravac i smer mogu biti isti, ali intenzitet neće da bude isti i zavisice od rastojanja posmatrane tačke od tačkastog naelektrisanja. Ako električno polje u nekom delu prostora nema u svakoj tački jednak vektor, za takvo polje se kaže da nije homogeno.

Kako je jačina električnog polja vektor, za analizu problema u kojima je ono involvirano koriste se vektorska algebra i analiza. A kada su u pitanju linearne sredine koristi se i princip superpozicije, koji je poznat pod mnogim drugim imenima i rutinski se primenjuje u raznim oblastima matematike i fizike bez posebnog definisanja. Princip superpozicije u slučaju jačine električnog polja formuliše da je jačina polja u nekoj tački prostora, a u okolini više naelektrisanih tela, jednaka vektorskom zbiru ječina polja koje proizvodi svako telo ponaosob. Sa druge strane, princip superpozicije se često primenjuje i u suprotnom smeru, na primer da je električno polje u okolini tačkastog naelektrisanja jednako polju koje bi u svojoj okolini stvaralo više tačkastih naelektrisanja postavljenih u istu tačku prostora kao i originalno tačkasto naelektrisanje, a da je pri tome ukupna količina naelektrisanja u oba slučaja jednaka.

Primer 2.2

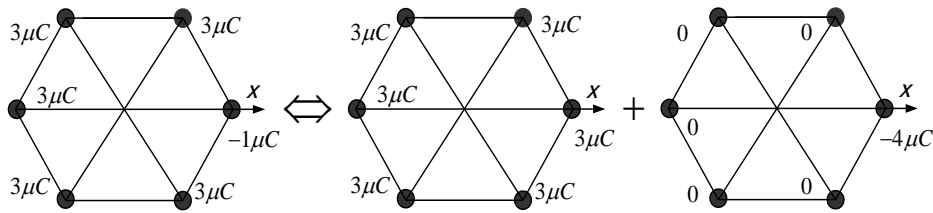
U 5 temena pravilnog šestougla ABCDEF nalaze se naelektrisanja od $3\mu\text{C}$, slika 2.2, dok se u samo jednom temenu nalazi naelektrisanje $-1\mu\text{C}$. Odrediti jačinu, pravac i smer vektora električnog polja u preseku dijagonala. Stranica je dužine 1cm, a šestougao se nalazi u gasu relativne dielektrične konstante $\epsilon_r = 1.3$.

Rešenje:

Zadatak se jednostavno rešava primenom principa superpozicije. Neka je centar šestougla postavljen u koordinatu (0,0) koordinatnog sistema i neka se teme sa $-1\mu\text{C}$ nalazi na pozitivnom delu x ose. Tada se to naelektrisanje može matematički predstaviti kao dva nezavisna *preklopljena* naelektrisanja od $-4\mu\text{C}$ i $3\mu\text{C}$:

$$-1 \mu\text{C} = -4 \mu\text{C} + 3 \mu\text{C},$$

Na osnovu toga sistem se može predstaviti kao superpozicija dva sistema:



Slika 2.2 Superpozicija naelektrisanja

Na osnovu toga vektor E se može naći superpozicijom dva slučaja:

- Prvi slučaj: u svim temenima se nalaze naelektrisanja od $3\mu\text{C}$ i tada je rezultantno polje koje se dobija kao vektorski zbir pojedinačnih polja u centru jednako nuli.
- Drugi slučaj: samo u jednom temenu se nalazi naelektrisanje od $-4\mu\text{C}$, dok je u ostalim temenima naelektrisanje 0, i tada je rezultantno polje u centru jednako

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{|-4 \cdot 10^{-6}| \text{C}}{(10^{-2} \text{m})^2} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{C}}{10^{-4} \text{m}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ m}}{1.3 \text{ F}} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{10^{-4} \text{m}^2} = 27.7 \cdot 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

sa pravcem i smerom po x osi orijentisano od $(0,0)$ ka naelektrisanju od $-4\mu\text{C}$. Ukupno polje se dobija kao zbir rezultata u prethodna dva slučaja što iznosi $27.7 \cdot 10^7 \text{V/m}$.

2.2.3 Homogeno električno polje

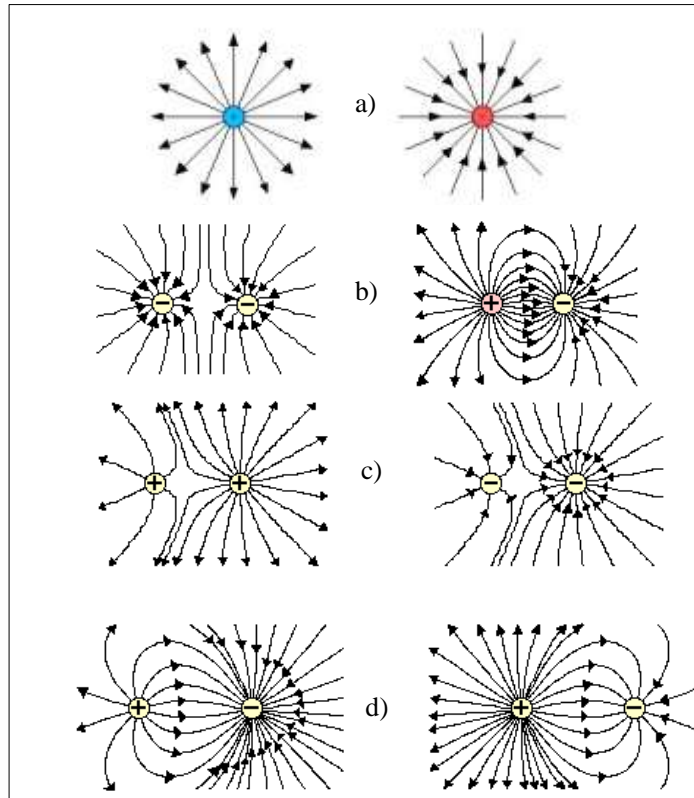
Posebno je interesantan slučaj električnog polja između dve ravne paralelne ploče (elektrode) razdvojene dielektrikom debljine d . Takva struktura se naziva *pločasti kondenzator*. Neka je površina ploča S , njihove količine naelektrisanja $+q$ i $-q$, a napon (potencijalna razlika) između ploča U . Ukoliko je rastojanje između ploča mnogo manje od najmanje dimenzije ploča, tada je vektor jačine električnog polja usmeren pod pravim uglom od pozitivne ka negativnoj elektrodi i u međuprostoru ploča iznosi približno:

$$E = \frac{q}{\epsilon S} = \frac{U}{d} \quad (2.6)$$

gde je $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ dielektrična konstanta materijala. Dakle, električno polje u takvom pločastom kondenzatoru može da se tretira kao *homogeno*.

2.2.4 Linje električnog polja (linije sile električnog polja)

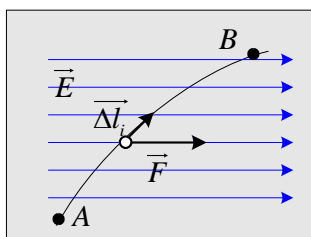
Za lakšu vizuelizaciju električnog polja koriste se *linije (sile) električnog polja*. To su zamišljene krive linije po kojima bi se, pod dejstvom električne sile u električnom polju kretalo pozitivno tačkasto naelektrisanje. Vektor E je uvek tangentan na liniju električnog polja. Linije počinju iz pozitivnih naelektrisanja (ili ∞) i završavaju se u negativnim naelektrisanjima (ili ∞), i uvek su normalne na površinu savršenog provodnika. Gustina linija električnog polja srazmerna je jačini električnog polja. Homogeno električno polje se predstavlja paralelnim i podjednako gustim linijama. Na slici 2.2 prikazane su linije polja E za nekoliko elementarnih slučajeva.



Slika 2.2: Linije električnog polja sistema od dva tačkasta naelektrisanja: a) usamljena tačkasta naelektrisanja iste vrednosti; b) dva tačkasta naelektrisanja iste apsolutne vrednosti; c) dva tačkasta naelektrisanja istog znaka ali različite vrednosti; d) dva tačkasta naelektrisanja različitog znaka različitih apsolutnih vrednosti

2.2.5 Pojam električnog potencijala i napona. Rad u električnom polju.

Ako se naelektrisano telo nalazi u električnom polju, na njega deluje električna sila opisana sa (2.5). Ako se telo pri tom pomera pod dejstvom električne sile, tada ta sila vrši pozitivan rad. Svakako, rad se vrši na račun promene potencijalne energije. Posmatrajmo sad probno tačkasto naelektrisanje Δq unutar polja E , slika 2.3.



Slika P2.3. Kretanje tačkastog naelektrisanja od tačke A do tačke B unutar električnog polja E pod dejstvom sile F .

Ako se tačkasto naelektrisanje kreće sporo duž putanje AB , elementarni rad ΔA_i koji se izvrši prilikom pomeranja duž dovoljno kratkog pravolinijskog segmenta Δl_i iznosi

$$\Delta A_i = \vec{F}_{na \Delta q} \cdot \vec{\Delta l}_i = \Delta q \vec{E} \cdot \vec{\Delta l}_i, \quad (2.7)$$

gde je $\vec{\Delta l}_i$ vektor pomeraja. Tada je ukupni rad koji se izvrši duž putanje AB jednak

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \Delta q \sum_{i=1}^n \vec{E} \cdot \vec{\Delta l}_i \quad (2.8)$$

Proizvod vektora E i vektora Δl_i u jednačini (2.8) je skalarni proizvod vektora i on iznosi

$$\vec{E} \cdot \vec{\Delta l}_i = E \cdot \Delta l_i \cdot \cos \theta_i, \quad (2.9)$$

gde je θ_i ugao između vektora E i vektora Δl_i . Kada kada $n \rightarrow \infty$, $\Delta l_i \rightarrow dl$, tada i suma u jednačini (2.8) postaje integral:

$$A = \Delta q \cdot \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}. \quad (2.10)$$

Integral u prethodnoj formuli je konturni integral čije rešavanje u opštem slučaju zahteva poznavanje vektorske analize koja se izučava u Matematici III. U jednostavnijim geometrijskim slučajevima, a koji se često sreću u inženjerskoj praksi, taj integral se lako svodi na skalarni određeni integral.

Prehodni integral može da se napiše i na sledeći način:

$$A = \Delta q \cdot \left(\int_A^R \vec{E} \cdot \vec{dl} - \int_B^R \vec{E} \cdot \vec{dl} \right), \quad (2.11)$$

Gde je R proizvoljno izabrana referentna tačka u prostoru. Pri tome integral

$$V_A = \int_A^R \vec{E} \cdot \vec{dl}, \quad (2.12)$$

predstavlja fizičku veličinu koja se naziva *potencijal električnog polja* u tački A , dok integral

$$V_B = \int_B^R \vec{E} \cdot \vec{dl}, \quad (2.13)$$

predstavlja *potencijal električnog polja* u tački B .

Kako je referentna tačka proizvoljno izabrana u prostoru, potencijal električnog polja je u suštini neodređeni integral, dakle potencijal kao fizička veličina je skalar relativan u odnosu na referentnu tačku. Sada se izraz (2.11) može napisati uprošćeno:

$$A = \Delta q \cdot (V_A - V_B) = \Delta q \cdot U_{AB}, \quad (2.14)$$

pri čemu razlika potencijala između tačaka A i B predstavlja fizičku veličinu koja se naziva *električni napon* između tačaka A i B ili *potencijalna razlika* između tačaka A i B . Jedinica za električni potencijal i električni napon je Volt (V).

Zbog jednostavnosti je uobičajeno da se za referentnu tačku R uzima tačka u prostoru za koju se usvaja da je vrednost potencijala jednaka nuli. Pri tome su napon U_{AB} i potencijal V_A identični ukoliko je $V_B = V_R = 0$. Pokazuje se još da rad ne zavisi od putanje već samo od krajnjih tačaka kretanja.

Nezavisnost od oblika integracione putanje sugerise i da je napon u stvari jednak promeni električne potencijalne energije W jediničnog naelektrisanja, iz čega dalje proizilazi da je potencijalna energija probnog tačkastog naelektrisanja Δq unutar polja E u nekoj tački prostora, na primer B , jednaka proizvodu potencijala električnog polja u tački B i Δq :

$$W_B = \Delta q \cdot V_B \quad (2.15)$$

Primer 2.3.

Odrediti izraze za potencijalnu energiju i potencijal tačkastog naelektrisanja Δq u električnom polju tačkastog naelektrisanja q_0 na rastojanju r od njega. Sredina je vakum.

Rešenje:

Označimo sa x rastojanje od tačkastog naelektrisanja q_0 . Tada je jačina električnog polja koje potiče od naelektrisanja q_0 na rastojanju x od njega jednaka:

$$E = k \frac{q_0}{x^2}. \quad (2.16)$$

Ako se kao referentna usvoji tačka u beskonačnosti gde je vrednost jačine polja jednaka nuli, prema (2.12) potencijal na rastojanju r od tela jednak:

$$V(r) = \int_r^{\infty} k \frac{q_0}{x^2} dx = -k \frac{q_0}{x} \Big|_r^{\infty} = k \frac{q_0}{r} \quad (2.17)$$

Potencijalna energija probnog tačkastog naelektrisanja Δq na rastojanju r od tačkastog naelektrisanja q_0 iznosi:

$$W(\Delta q, r) = \Delta q \cdot V(r) = k \frac{\Delta q \cdot q_0}{r}. \quad (2.18)$$

Napomena: Potencijal električnog polja je skalarna veličina. Iz tog razloga je potencijal u nekoj tački polja jednak algebarskom zbiru potencijala koje bi generisali pojedinačni izvori polja. U slučaju n tačkastih naelektrisanja q_i od kojih je svako na rastojanju r_i od posmatrane tačke A u prostoru čiji se potencijal posmatra, tada je

$$V_A = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (2.19)$$

Primer 2.4

Na rastojanju R_0 od fiksiranog tačkastog naelektrisanja $q_0 > 0$ nalazi se tačkasto naelektrisanje $q_1 > 0$, mase m . Ako q_1 iz stanja mirovanja počne da se kreće i pređe put $100 R_0$, kolika mu je brzina nakon celog pređenog puta, ako je sredina u kojoj se sistem nalazi gas relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 2$?

Rešenje:

Kinetička energija q_1 dobija se kao razlika potencijalnih energija pre početka kretanja i na kraju pređenog puta, bez obzira na oblik putanje:

$$W_K = \frac{m \cdot v^2}{2} = W_{P1} - W_{P2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \frac{q_1 \cdot q_0}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \frac{q_1 \cdot q_0}{100R} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \frac{q_1 \cdot q_0}{R},$$

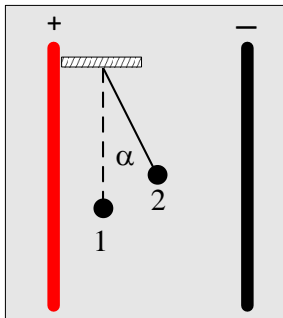
Iz prethodnog izraza proizilazi da je tražena brzina

$$v \approx \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot m \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \frac{q_1 \cdot q_0}{R}}.$$

Greška ovog približnog rešenja je 1% jer je zanemarena potencijalna energija na rastojanju od $100R$.

Primer 2.5

Kuglica mase $m = 0.4$ g naelektrisana je sa $q = 5 \cdot 10^{-9}$ C i obešena je o neistegljivu nit zanemarive mase i dužine $l = 20$ cm. Ako se sistem nalazi u električnom polju $E = 10^5$ V/m pločastog kondenzatora, slika 2.4, koliki je ugao α i kolika je razlika potencijala tačaka 1 i 2?



Slika P2.4. Naelektrisana kuglica u homogenom električnom polju pločastog kondenzatora

Rešenje:

Kulonova sila koja deluje na kuglicu iznosi $F = E \cdot q = 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 5 \cdot 10^{-4}$ N. Težina kuglice je jednaka $G = mg = 0.4 \cdot 10^{-3} \cdot 9.81 \approx 40 \cdot 10^{-4}$ N. Na osnovu toga je $\text{tg } \alpha = F/G \approx 0.125$, pa je $\alpha = \text{arctg}(0.125) = 7^\circ$. Sve tačke unutar kondenzatora na vertikalnoj pravoj koja prolazi kroz tačku 2 su na istom potencijalu kao i tačka 2, pa se rastojanje d od tačke 1 do te prave dobija iz izraza $\sin \alpha = d/l \Rightarrow d = l \cdot \sin \alpha$.

Traženi napon: $U_{12} = E \cdot d = E \cdot l \cdot \sin \alpha = 10^5 \cdot 0.2 \cdot \sin 7^\circ = 2440$ V.

2.2.6. Energija kondenzatora

Energija kondenzatora je potencijalna energija električnog polja u kondenzatoru. Do nje se može doći preko određivanja rada potrebnog da se kondenzator naelektriše. Elementarni rad ΔA koji ulože eksterne sile da pomere pozitivno probno naelektrisanje Δq iz tačke a u tačku b dat je izrazom 2.14. Ako je tačka a na negativnoj elektrodi kondenzatora, a tačka b na pozitivnoj elektrodi kondenzatora, tada je U_{ab} istovremeno i napon na kondenzatoru: $U_{ab} = U_C$. Pri tome se napon na kondenzatoru poveća za $\Delta q = C \cdot \Delta U_C$. Dakle jednačina 2.14. može da se napiše u sledećem obliku:

$$\Delta A = C \cdot U_c \cdot \Delta U_c \quad (2.20)$$

Prelaskom na infitezimalne veličine $\Delta A \rightarrow dA$ i $\Delta U_c \rightarrow dU_c$, dobija se izraz:

$$dA = C \cdot U_c \cdot dU_c \quad (2.21)$$

Na početku procesa kondenzator je bio prazan i napon na njemu je bio nula. Stoga je i početni rad bio nula. Na kraju procesa kondenzator je napunjen na napon U_c , a ukupan uloženi rad je jednak potencijalnoj energiji kondenzatora W_c :

$$\int_0^{W_c} dA = \int_0^{U_c} C \cdot U_c \cdot dU_c \quad (2.22)$$

Dakle:

$$W_c = \frac{1}{2} C U_c^2 \quad (2.23)$$

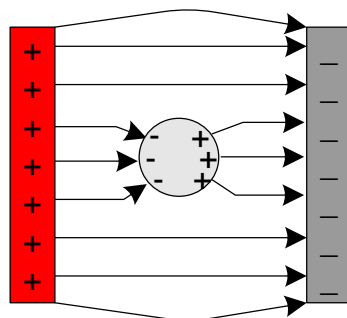
Ako se uzmu u obzir relacije koje povezuju napon, naelektrisanje i kapacitivnost, dobijaju se ekvivalentne relacije za energiju kondenzatora:

$$W_c = \frac{1}{2} C U_c^2 = \frac{1}{2} Q U_c = \frac{1}{2C} Q^2, \quad (2.24)$$

pri čemu je Q krajnje naelektrisanje kondenzatora.

2.2.7. Provodnici u električnom polju

Ako se u električno polje unese provodnik, na primer metalni predmet, na pokretljive nosioce naelektrisanja, u ovom slučaju elektrone, delovaće električna sila. Kako provodnik nije povezan u električno polje, elektroni neće moći da napuste provodnik i nagomilaće se na jednom kraju provodnika ostavljajući deficit elektrona na drugom kraju provodnika, slika 2.5.



Slika 2.5. Provodnik u električnom polju

Na kraju procesa nagomilavanja prestaće kretanje elektrona: uravnotežiće se električne sile kojima spoljašnje polje deluje na elektrone i unutrašnje sile koje su nastale nagomilavanjem elektrona na jednom kraju provodnika, tako da će rezultantna sila na elektrone biti ravna nuli.

Samim tim je električno polje unutar provodnika postalo jednako nuli, što posledično znači da će sve tačke provodnika biti na istom potencijalu.

2.3 Konstantna električna struja

2.3.1 Pojam električne struje

Električna struja je jedan od osnovnih pojmova u elektrotehnici i predstavlja meru količine elektriciteta koja se pomerila u jedinici vremena. Pomeraj naelektrisanja može se vršiti na različite načine. Kod metalnih provodnika, mehanizam pomeranja je kretanje slobodnih elektrona. U rastvorima mehanizam pomeranja je kretanje pozitivno ili negativno naelektrisanih jona, kao što je to slučaj u elektrohemijskim baterijama ili u postupku galvanizacije. U poluprovodnicima naelektrisanje se kreće kretanjem slobodnih elektrona ili šupljina koje su nosioci pozitivnog naelektrisanja.

Uobičajena oznaka za struju je I ukoliko se radi o konstantnoj struji, ili $i=i(t)$ ukoliko se radi o promenljivoj struji. Jedinica za struju je Amper (A) i predstavlja pomeraj od 1 C/s. Po konvenciji se uzima da smer struje odgovara smeru kretanja pozitivnog naelektrisanja.

Prosečna (srednja) struja I se definiše kao količnik ukupnog pomenog naelektrisanja Δq i vremenskog intervala u kome se vrši taj pomeraj Δt :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (2.25)$$

S druge strane, trenutna struja $i(t)$ se definiše kao brzina promene naelektrisanja, odnosno prvi izvod količine elektriciteta po vremenu:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.26)$$

U slučajevima kada se struja sastoji od kretanja dva tipa nosilaca, trenutna struja se može izraziti i na sledeći način:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq^+ + dq^-}{dt} \quad (2.27)$$

gde je dq^+ pomereno inkrementalno pozitivno naelektrisanje dok je dq^- pomereno inkrementalno negativno naelektrisanje.

U elektrotehnici se sreću vrlo različite vrednosti struje. Struja kod munja i gromova je reda nekoliko desetina hiljada ampera. U industrijskim pogonima i električnim vozilima struje su reda stotinu ampera. Uređaji u domaćinstvu obično rade sa strujama u opsegu od 0.5 A do 16 A. U elektronskim kolima struje su reda mA, μ A ili nA. U raznim mernim uređajima u fizici struje mogu biti vrlo male, reda pA (10^{-12} A), kolike su i struje između nervnih ćelija kod živih bića.

2.3.2 Napon

Kao što smo videli, razlika potencijala ili *napon* predstavlja potencijalnu energiju po jediničnom naelektrisanju. Posmatrajući inkrementalne promene energije i naelektrisanja, trenutna vrednost napona se može definiše kao:

$$v(t) = \frac{d}{dq(t)} w(q(t)) \quad (2.28)$$

Preko energije definicija za napon od jednog volta je energija od 1 J, koja je potrebna za pomeraj pozitivnog naelektrisanja od 1 C u elektrostatičkom polju.

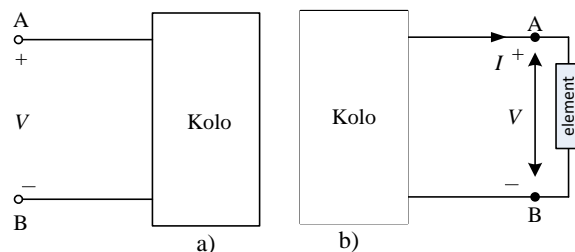
Napon se u fizici i teorijskim disciplinama elektrotehnike obično označava sa U ili $u = u(t)$ što smo koristili u dosadašnjim izlaganjima. Međutim, češća oznaka za napon u elektronici je ista kao i za potencijal, V ili $v = v(t)$, i u tekstu koji sledi pretežno ćemo koristiti takvu oznaku.

2.3.3 Referentni smerovi i polariteti

Prilikom analize mehaničkih sistema uvek se koristi neki koordinatni sistem koji definiše šta se podrazumeva pod pozitivnim smerom. Slična situacija je i u analizi električnih pojava, gde je vrlo važno da potencijali, naponi i struje u kolu budu tako definisani da se lako može odrediti koja je od tačka na višem a koja na nižem potencijalu, ili koji je stvarni smer neke struje.

Na slikama 2.6 a) i b), dat je objekat imenovan sa *Kolo*, i koji se na primer satoji od više povezanih *električnih elemenata*, i koje u sadejstvu mogu da između tačaka A i B generišu potencijalnu razliku. Taj objekat ćemo nazvati samo *kolo* ili *električno kolo*, i za sada ćemo koristiti intuitivnu predstavu i tog objekta, kao i intuitivnu predstavu pojma elementa. Formalniji opis će biti dat u narednim poglavljima. Na slici 2.6 b) prikazano je kolo povezano sa eksternim elementom preko dva provodnika.

Na slici 2.6 a) sa V je označen napon između tačaka A i B. Znaci + i – označavaju *referentni smer* napona V . Ako je $V > 0$, onda je tačka sa oznakom + (A) na višem potencijalu od tačke sa oznakom – (B), ako je $V < 0$, onda je tačka sa oznakom + (A) na nižem potencijalu od tačke sa oznakom – (B). Znak – se ne mora pisati, tada se on implicitno podrazumeva. Referentni smer napona se može proizvoljno usvojiti. Neka je, na primer, na slici 2.6 a) vrednost napona $V = 3$ V, što znači da je potencijal tačke A veći za 3 V od potencijala tačke B. Ako bi se referentni smer usvojio tako da + bude kod tačke B, onda bi vrednost napona V bila $V = -3$ V, što ima isto značenje kao u prethodnom slučaju.



Slika 2.6: Označavanje polariteta napona i referentnog smera za struju. Blok imenovan kao *Kolo* je sistem povezanih električnih komponenti koje mogu da između tačaka A i B generišu potencijalnu razliku.

Na slici 2.6 b) je strelicom označen referentni smer za struju I , tako da ona protiče od tačke A, kroz element kola, do tačke B. Ako je $I > 0$, onda je stvarni smer struje isti sa referentnim smerom, a ako je $I < 0$, onda je stvarni smer struje suprotan referentnom smeru. Neka je $I = 4$ A. Onda je stvarni smer struje identičan sa nacrtanim referentnim smerom, a amplituda struje je 4 A. Ako bi pretpostavljeni referentni smer bio suprotan nacrtanom, tada bi vrednost struje bila $I = -4$ A, pa bi stvarni smer struje bio suprotan referentnom, odnosno isti kao u prvom slučaju.

Iako referentni smerovi napona i struja u nekom sistemu mogu biti proizvoljni, iz praktičnih razloga je za pojedine elemente u električnom sistemu opravdano definisati i koristiti *usaglašene referentne smerove* napona i struje. Kod usaglašanih smerova napona i struje nekog elementa, referentni smer struje je orjentisan od tačke višeg ka tački nižeg referentnog potencijala, primer je sl. 2.6 b). Ako se podrazumevaju usaglašeni referentni smerovi, onda je dovoljno da se orijentiše i označava jedna velična jer se orijentacija druge podrazumeva. Izuzetak od pravila usaglašavanja je u slučaju *generatora* (pojam generatora za sad koristimo intuitivno), kod njih je praktičnije koristiti neusaglašene smerove.

Dakle, cilju sistematske analize ili sinteze električnih kola, neophodno je specificirati vrednost i referentni smer bilo kog napona ili struje u kolu. Veličine date bez referentnog smera su nekompletne, jer definišu samo algebarske vrednosti odgovarajućih veličina, a ne i njihove smerove, pa su samim tim i neupotrebljive.

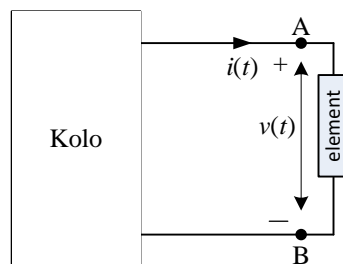
2.3.4 Energija i snaga

Energija i snaga su izuzetno važni pojmovi u praktičnoj i teorijskoj elektrotehnici. Prilikom analize električnih kola u elektronici se srećemo sa elementima koji *primaju* energiju od kola ili *predaju* energiju kolu. Pri tome se brzina promene energije nekog elementa u kolu opisuje *snagom*. Snaga se definiše kao brzina promene energije:

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = v \cdot i \quad (2.29)$$

Prethodna jednačina pokazuje da se snaga na elementu kola može predstaviti proizvodom napona na elementu i struje kroz element. Pošto napon i struja mogu biti vremenski promenljivi, snaga se takođe može menjati sa vremenom i onda se označava sa $p(t)$.

Kako neki element može primiti energiju od ostatka kola, ili predavati energiju ostatku kola, praktično je definisati pojmove ulazne i izlazne snage.



Slika 2.7: Konvencija za označavanje polariteta pri izračunavanju ulazne ili izlazne snage.

Trenutna ulazna snaga, ilustrovano primerom elementa vezanog između tačaka A i B sa sl. 2.7, pri usaglašenim smerovima napona i struje, jednaka je

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (2.30)$$

Ako je ulazna snaga pozitivna tada element prima energiju od ostatka kola, a ako je ulazna snaga negativna, tada element predaje energiju ostatku kola.

U slučaju generatora koji su namenjeni da predaju energiju ostatku kola, praktičnije je koristiti izlaznu snagu, koja se dobija kao proizvod međusobno neusaglašenih smerova napona i struje. Pri tome, ako je izlazna snaga pozitivna, generator predaje energiju ostatku kola. U primeru sa slike 2.7, izlazna snaga kola je jednaka ulaznoj snazi elementa.

Rad koji se izvrši na račun promene energije nekog elementa od trenutka t_1 do trenutka t_2 može se odrediti integracijom jednačine za ulaznu snagu kao:

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot i \, dt \quad (2.31)$$

Energija koju neki element prima od ostatka kola saglasno jednačini 2.31 može da se skladišti (akumulira) u tom elementu u vidu neke forme elektromagnetske energije, da se pretvori u toplotnu energiju, ili čak da se pretvori u neku treću vrstu energije, što je na primer slučaj kod jednosmernog motora gde se radi o mehaničkoj energiji.

Ako je ulazna snaga nekog električnog elementa nenegativna takav element samo može da prima energiju od ostatka kola i za njega se kaže da je *pasivan*. Ako element nije pasivan, onda je *aktivan*. Komponente koje mogu samo predavati energiju ostatku kola, kao što su na primer generatori, pripadaju klasi aktivnih komponenti.

Neke komponente, kao što je na primer kondenzator, mogu pod određenim uslovima vraćati akumulisanu energiju nazad ostatku kola, i takve komponente se nazivaju *reaktivne* komponente.

Pasivnost definisana na prethodni način je tzv. termodinamička pasivnost, koristi se u fizici i teorijskoj elektrotehnici, i obuhvata električne objekte i elemente koji mogu imati i više od dva priključka. U elektronici koja se bavi obradom signala pojam pasivnosti i aktivnosti se definiše na drugi način. Ukoliko električna komponenta ima sposobnost povećanja električne veličine (struje, napona, potencijala, snage), bez obzira na ukupan utrošak energije, takva komponenta se uopšteno zove pojačavač ili aktivna komponenta. U suprotnom je u pitanju pasivna komponenta. Po toj definiciji primer pasivnih komponenti su generatori, kao i otpornici i kondenzatori.

2.4. Osnovni pojmovi o magnetskom polju

2.4.1. Pojam magnetskog polja i magnetske sile

Magnetsko polje je samo jedan vid ispoljavanja elektromagnetskog polja. Istorijski posmatrano mnoga drevna društva znala su za neke efekte magnetskog polja. Prvi efekti su zapaženi kod nekih ruda, za koje sad znamo da u sebi sadrže feromagnetske elemente kao što su gvožđe, nikal itd. Komadi takvih ruda su se ponašali kao stalni magneti koji su se međusobno privlačili ili odbijali, i koji su privlačili predmete sačinjene od feromagnetskih materijala. Mnogo kasnije je primećeno da stalni magneti deluju na provodnike sa strujom, kao i da provodnici sa strujom deluju silama jedni na druge. Na osnovu toga je zaključeno da je u pitanju fizičko polje

koje se manifestuje silom koja deluje na provodnik kroz koji teče struja, ako se pri tome isključe dejstva drugih sila, na primer gravitacione ili Kulonove.

Jedna od osnovnih fizičkih veličina kojom se kvantifikuje magnetsko polje je vektor magnetske indukcije B , jedinica Tesla:

$$1 \text{ T} = \frac{1 \text{ N}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \quad (2.32)$$

Koristeći vektor magnetske indukcije, definiše se mera uzajamnog delovanja magnetskog polja i provodnika sa strujom: u posmatranoj tački prostora magnetska sila koja deluje na pravolinijski segment provodnika Δl kroz koji protiče struja I je proporcionalna vektorskom proizvodu magnetske indukcije B i vektora koji se pridružuje segmentu provodnika da bi se uzeo u obzir smer struje:

$$\Delta \vec{F} = I \cdot \Delta \vec{l} \times \vec{B}. \quad (2.33)$$

Intenzitet vektora koji definiše segment provodnika je jednak dužini tog segmenta dok mu je smer određen smerom protoka struje. Ukoliko je ugao između segmenta provodnika Δl i vektora B jednak φ , tada je intenzitet magnetske sile jednak

$$\Delta F = I \cdot \Delta l \cdot B \cdot \sin \varphi. \quad (2.34)$$

2.4.2. Lorencova sila

Pošto magnetska sila deluje na provodnik kroz koji protiče električna struja, lako je zaključiti da ta sila u stvari deluje na pokretna naelektrisanja u provodniku. Ako se razmotri jedna pokretna naelektrisanja čestica tada na nju u posmatranoj tački unutar magnetskog polja deluje Lorencova sila koja je proporcionalna količini naelektrisanja čestice, njenoj brzini i vrednosti magnetske indukcije u toj tački. Smer sile je pri tome normalan na ravan koju definišu vektori brzine v i vektor magnetske indukcije B , saglasno pravilu vektorskog proizvoda:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.35)$$

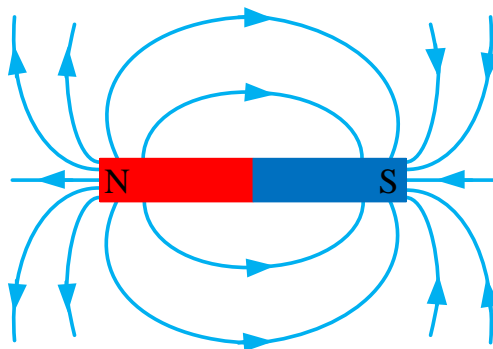
Pri tome se podrazumeva da dejstva drugih fizičkih polja na česticu ne postoje. Na ovaj način se posredno preko konstatovane sile F na pokretno naelektrisanje q koje se kreće brzinom v konstatuje i postojanje magnetskog polja indukcije B . Kako se radi o vektorskom proizvodu, intenzitet sile iznosi

$$F = qvB \sin \alpha, \quad (2.36)$$

gde je α ugao koji zaklapaju vektori B i v .

2.4.3. Linije vektora B

Linije magnetskog polja predstavljaju metod za njegovu vizuelizaciju. U slučaju vektora B linije vizuelizuju pravac smer i intenzitet. Svaka od linija formira zatvorenu konturu iako to ne mora uvek da se vidi zbog ograničenosti prostora na slici. U slučaju stalnog magneta koji uvek mora da ima severni (N) i južni pol (S), linije izlaze iz severnog pola, savijaju se oko magneta i poniru u južni pol, slika 2.8.



Slika 2.8. Stalni magnet i linije njegovog magnetskog polja

Vektor B u proizvoljnoj tački prostora je tangentan na liniju polja u istoj toj tački, dok je intenzitet vektora B proporcionalan gustini linija.

2.4.4. Izvori magnetskog polja

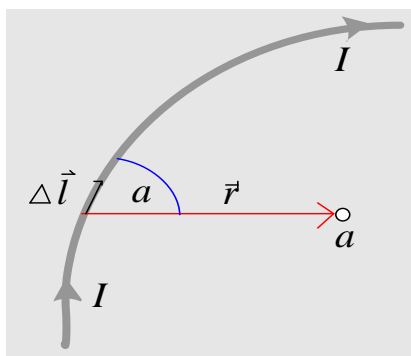
Stalni magneti kao izvor magnetskog polja je nešto što je svima opšte poznato, i stalni magneti imaju izuzetno veliku primenu u tehnici. Ipak, kada su u pitanju električna kola, magnetsko polje čiji je izvor električna struja je od većeg značaja.

Jedan od elementarnih izraza kojim je moguće odrediti vrednost magnetske indukcije u okolini provodnika sa strujom, a koji se nalazi u vakumu, poznat je pod nazivom Bio-Savarov zakon. To je formula koja daje intenzitet, pravac i smer vektora B u tački a na rastojanju r od segmenta provodnika Δl kroz koji protiče jednosmerna struja I :

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta \vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}. \quad (2.37)$$

Pri tome je pravac i smer vektora Δl definisan smerom struje, slika 2.9, a njegov intenzitet je jednak njegovoj dužini. Jedinični vektor \vec{r}_0 dobija se tako što se vektor koji se formira potegom od segmenta provodnika do tačke a podeli sa njegovim intenzitetom, slika 2.9:

$$\vec{r}_0 = \vec{r} / |\vec{r}| \quad (2.38)$$



Slika 2.9. Ilustracija Bio-Svarovog zakona

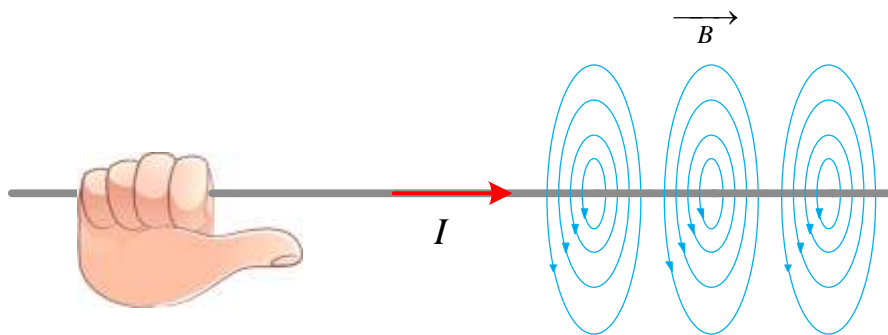
Sam intenzitet vektora magnetske indukcije iznosi

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta l \sin \alpha}{r^2}. \quad (2.39)$$

Konstanta μ_0 je fizička konstanta koja se zove Permeabilnost vakuma i iznosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$. Ukoliko se sistem nalazi u sredini koja nije vakum, tada se umesto Permeabilnosti vakuma koristi permeabilnost sredine koja iznosi $\mu = \mu_r \mu_0$, gde je μ_r relativna permeabilnost te sredine i predstavlja meru odstupanja od vakuma. Za vazduh, većinu gasova, mnoge metale i nemetale važi da je $\mu_r \sim 1$.

U opštem slučaju ukupno magnetsko polje u proizvoljnoj tački a i za proizvoljan oblik provodnika, računa se upotrebom vektorske integracije što predstavlja tematiku iz više matematičke analize i prevazilazi okvire ove knjige. Ali u specijalnim slučajevima koji su od značaja u tehnici, vektorski integral se može zameniti običnim integralom. Bez izvođenja, date su formule za dva specijalna slučaja: a) beskonačnog pravog provodnika; b) na osi kružne strujne konture.

Magnetsko polje u okolini pravog beskonačnog strujnog provodnika struje I



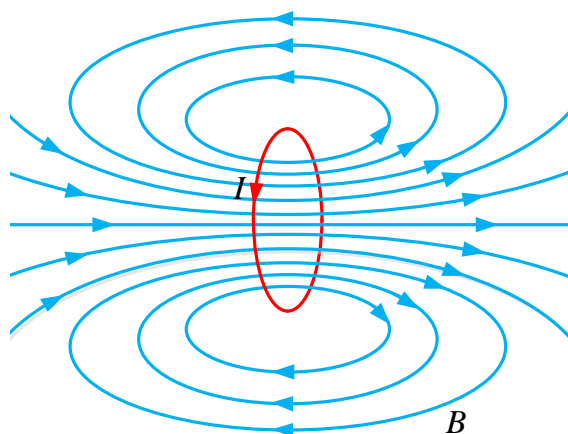
Slika 2.10. Linije sile magnetskog polja beskonačnog strujnog provodnika i ilustracija pravila desne ruke za određivanje pravca

Linije magnetskog polja beskonačnog provodnika su zatvorene kružne konture centrirane u provodniku. Jednake su u svakoj ravni normalnoj na provodnik. Pošto intenzitet vektora B opada sa rastojanjem, sa rastojanjem se smanjuje i gustina linija. Usmerenje linija polja se može odrediti pravilom desne ruke slika 2.10: ako se desnom rukom drži provodnik tako da palac pokazuje smer struje, u tom slučaju ostali prsti obuhvataju provodnik u istom smeru kao i linije polja. Pri tome je zavisnost intenziteta vektora B na rastojanju r od provodnika sa strujom I data formulom:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2.40)$$

Magnetsko polje na osi kružne konture kroz koju protiče struja I

Određivanje magnetskog polja koga generiše usamljena kružna kontura u proizvoljnoj tački prostora zahteva složen matematički aparat i kao rezultat se dobijaju složene vektorske funkcije. Na slici 2.11 ilustrovane su linije polja jedne usamljene strujne konture.



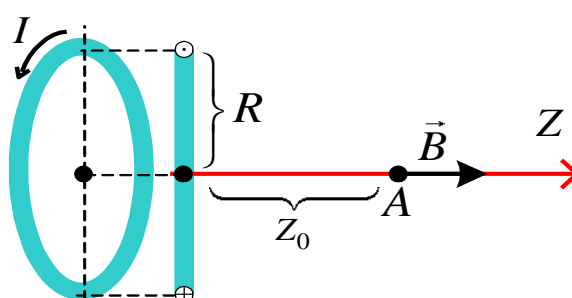
Slika 2.11. Ilustracija linija magnetskog polja u okolini usamljene strujne konture kružnog oblika

Na slici se vidi složenost raspodele linija vektora B , ali se može uočiti i da kroz centar konture prolazi linija polja koja predstavlja pravu. Iz tog razloga navešćemo samo formulu za polje na osi kružne konture, jer je dovoljno jednostavna, a pri tome ilustrativna za razumevanje efekata koje pravi kružna kontura.

Neka je data kružna kontura poluprečnika R , kroz koju protiče struja I , slika 2.12. U tački A na osi konture, i rastojanju Z_0 od ravni konture, vektor magnetske indukcije B ima intenzitet:

$$B(Z_0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + Z_0^2)^{3/2}} \quad (2.41)$$

Pri tome se pravac vektora B poklapa sa Z osom dok se smer određuje pravilom desne ruke kao i u slučaju polja beskonačnog pravolinijskog provodnika: ako se desnom rukom obuhvati Z osa tako da prsti prate smer struje kroz provodnik, tada palac pokazuje smer vektora B .



Slika 2.12. Ravan konture leži u ravni XY i normalna je na Z osu. Pri tome se osa simetrije konture poklapa sa Z osom. Sa leve strane od kružne konture je ilustracija koja opisuje smer struje. Oznaka na samoj konturi gde je u krugu nacrtana tačka znači da struja izlazi iz ravni slike, a na mestu gde je u krugu nacrtan \oplus znači da na tom mestu struja ulazi u ravan slike.

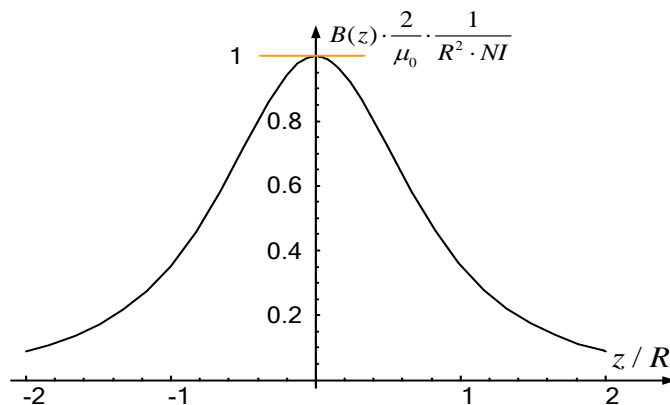
Ukoliko se kružni provodnik sa slike 2.12. sastoji on N navojaka žice, tada je situacija ista kao da N nezavisnih navojaka proizvodi magnetsko polje, i ono će biti N puta veće. U tom slučaju je intenzitet vektora B u tački A jednak:

$$B(Z_0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 \cdot NI}{(R^2 + Z_0^2)^{3/2}} \quad (2.42)$$

Kada se posmatra magnetsko polje kružne strujne konture na rastojanju koje je mnogo veće od njenog poluprečnika, $Z_0 \gg R$, tada je intenzitet vektora B jednak:

$$B(Z_0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 \cdot NI}{Z_0^3}, \quad (2.43)$$

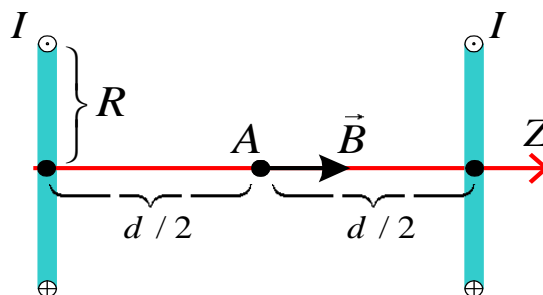
što znači da intenzitet opada sa kubom rastojanja. Na slici 2.13. prikazan je normalizovan intenzitet vektora B u funkciji od promenljive z/R .



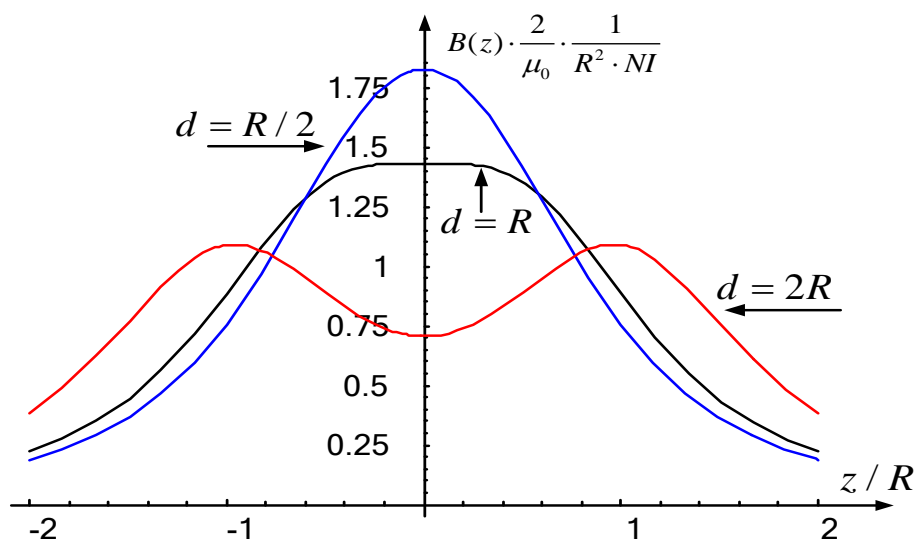
Slika 2.14. normalizovan intenzitet vektora B u funkciji od promenljive z/R .

Primer 2.6 Helmholtcovi kalemovi

Neka su dve tanke kružne konture sa po N navojaka kroz koje protiče struja I , poluprečnika R , postavljene na rastojanje d kao što je prikazano na slici 2.15. Pri tome je posmatrana tačka A tačno na sredini između kontura. Ukoliko se rastojanje d menja, može se i analitički pokazati da je u slučaju kada je $d = R$, magnetsko polje u okolini tačke A praktično homogeno. Takva konfiguracija sistema naziva se Helmholtcovi kalemovi (izumitelj Nemački fizičar Hermann von Helmholtz). Na slici 2.16, data je ilustracija normalizovanog intenziteta vektora B za 3 vrednosti rastojanja d .



Slika 2.15. Dve kružne konture sa po N navojaka kroz koje protiče struja I , poluprečnika R , postavljene na rastojanje d .



Slika 2.16. Ilustracija normalizovanog intenziteta vektora B za 3 vrednosti rastojanja d . Može se uočiti da je grafik krive za $d = R$ približno ravan za $z \approx \pm R/2$.

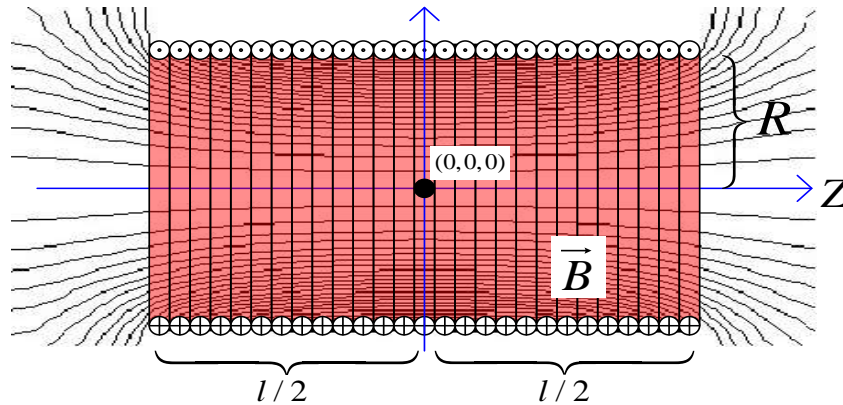
Intenzitet vektora B u tački A je jednak dvostrukoj vrednosti funkcije iz jednačine 2.41. na rastojanju $R/2$ od ravni konture:

$$2B(R/2) = \mu_0 \frac{R^2 \cdot NI}{(R^2 + R^2/4)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{R} NI \frac{1}{(1+1/4)^{3/2}} = \left(\frac{8}{5\sqrt{5}}\right) \frac{\mu_0}{R} NI. \quad (2.44)$$

Helmholcovi kalemovi imaju veliku primenu u nauci, tehnic i u mnogim drugim privrednim oblastima, gde god se ukaže potreba za homogenim magnetnim poljem. S obzirom da se slične karakteristike mogu dobiti i sa konturama kvadratnog oblika kod kojih je rastojanje prilagođeno maksimumu homogenosti, na tržištu se kao komercijalni mogu naći podjednako kružni i kvadratni Helmholcovi kalemovi raznih dimenzija. Za homogena polja veće homogenosti postoje strukture sa više kontura, ali se zbog svoje složenosti mnogo ređe koriste.

Primer 2.7 Solenoid

Kalem koji se sastoji od više spiralnih navojaka žice naziva se solenoid, slika 2.17.



Slika 2.17. Solenoid dužine l poluprečnika R , kroz čije namotaje protiče struja I

Na osi solenoida (Z osa), koji ima N navojaka žice namotanih oko cilindričnog jezgra permeabilnosti μ_0 , i kroz koji protiče struja I , intenzitet vektora B u funkciji od rastojanja z iznosi:

$$B(z) = \frac{\mu_0 NI}{4l} \left(\frac{2z+l}{\sqrt{R^2 + (z+l/2)^2}} - \frac{2z-l}{\sqrt{R^2 + (z-l/2)^2}} \right), \quad (2.45)$$

dok se smer vektora određuje pravilom desne ruke. U slučaju kada je $R \ll l$, u okolini centra solenoida magnetsko polje je približno homogeno sa intenzitetom magnetske indukcije

$$B(0) = \frac{\mu_0 NI}{4l} \left(\frac{l}{\sqrt{(l/2)^2}} - \frac{-l}{\sqrt{(-l/2)^2}} \right) = \frac{\mu_0 NI}{l} \quad (2.46)$$

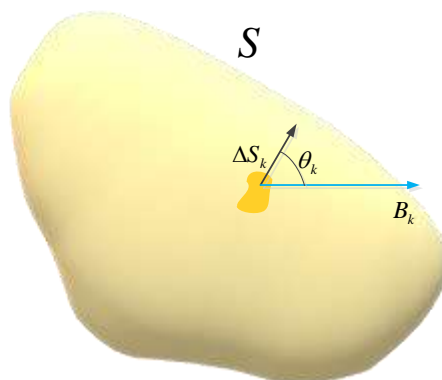
Solenoid kroz čije namotaje protiče struja generiše magnetsko polje slično stalnom magnetu koji ima isti geometrijski oblik kao solenoid. Za razliku od stalnog magneta, magnetsko polje solenoida je upravljivo i po intenzitetu i po smeru, zavisno od smera i intenziteta struje. Ta osobina se intenzivno koristi u realizaciji *elektromagnetskih ventila* koji imaju veliku primenu u praksi. Pored te solenoidi imaju i druge brojne primene u industriji i laboratorijskoj tehnici.

2.4.5. Fluks vektora B

Iako je površina fizička veličina čija je jedinica \mathbf{m}^2 , često se pod istim imenom podrazumeva i geometrijski objekat u 3D prostoru koji ima *konačnu površinu*. Pri tome se kaže da je površina S *zatvorena* ako ona predstavlja površ geometrijskog tela konačne zapremine i gde je moguće definisati šta je unutrašnjost a šta spoljašnjost te površine/tog tela. U suprotnom je površina S *otvorena*. Ukoliko prava prodire kroz zatvorenu površinu, mora postojati paran broj tačaka prodora, dok kroz otvorenu površinu može postojati i neparan broj tačaka prodora.

Fluks vektora B opisuje meru broja linija polja koje prolaze kroz zadatu površinu S u 3D prostoru. U opštem slučaju matematički opis fluksa zahteva poznavanje elemenata vektorske analize, i prevazilazi okvire ove knjige. Zbog toga ćemo dati jednostavniju matematičku formulaciju, koja će biti dovoljna za dalje diskusije u poglavljima koja slede.

Neka je data površina S , slika 2.18, koja je podeljena na N dovoljno malih elementarnih površina ΔS_k , tako da se može smatrati da je svaka od tih elementarnih površina potpuno ravna, i da je u svakoj tački svake od elementarnih površina intenzitet vektora B konstantan i iznosi B_k .



Slika 2.18. Elementarna površina kao vektorska veličina

Svaka elementarna površina opisana je vektorom čiji je intenzitet jednak veličini te površine, pravac je normalan na nju, a smer može biti odabran proizvoljno, ali tako da su vektori svih elementarnih površina na isti način usmereni, i da se taj smer koristi u svim razmatranjima u kojima je površina S uključena. U slučaju zatvorene površine vektori elementarnih površina su uvek usmereni od unutrašnjosti ka spoljašnjosti. Dakle za elementarnu površinu važi:

$$\vec{\Delta S}_k = \Delta S_k \cdot \vec{n}_k, \quad (2.47)$$

gde je \vec{n} jedinični vektor površine. Elementarni fluks vektora B kroz elementarnu površinu je jednak je njihovom skalarnom proizvodu

$$\Delta \Phi_k = \vec{B}_k \cdot \vec{\Delta S}_k = B_k \Delta S_k \cos \theta_k. \quad (2.48)$$

Ukupan fluks kroz površinu S je zbog toga jednak

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \Delta \Phi_k = \sum_{k=1}^N B_k \Delta S_k \cos \theta_k. \quad (2.49)$$

Ukoliko je površina ravna a vektor B ima isti intenzitet u svakoj tački površine, tada prethodna jednačina dobija jednostavan oblik:

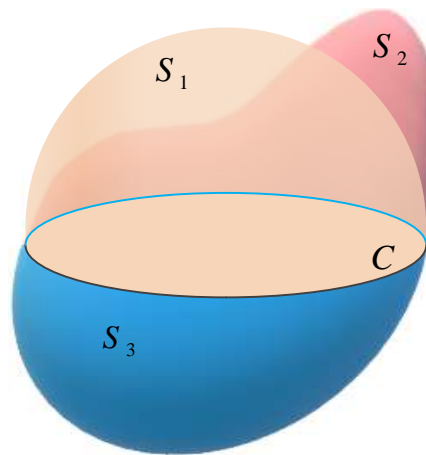
$$\Phi = B \cdot S \cos \theta, \quad (2.50)$$

gde je θ ugao između vektora B i normale na površinu S .

Jedinica za magnetski fluks je Veber [Wb]. To je izvedena jedinica, pri čemu je jedan Veber jednak $1 \text{ Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$. Često se može sresti da se vektor magnetske indukcije zove gustina magnetskog fluksa, sa jedinicom $1 \text{ T} = \text{Wb} / \text{m}^2$.

Kada je površina S zatvorena i s obzirom da su linije vektora B zatvorene krive linije, svaka linija polja podjednak broj puta ulazi i izlazi iz površine S . Stoga je fluks vektora B kroz zatvorenu površinu jednak je nuli, jer proizvodi iz izraza 2.46 na mestu ulaska linije polja u površinu i na mestu izlaska linije polja iz površine imaju isti moduo a suprotan znak. Na osnovu

toga može se pokazati da se za računanje fluksa može koristiti bilo koja otvorena površina S koju ograničava ista zatvorena kriva linija, što je ilustrovano na slici 2.19.



Slika 2.19. Ilustracija 3 otvorene površi S_1 , S_2 i S_3 ograničene istom konturom C . Fluks vektora B kroz sve tri površine je isti.

Interesantno je razmotriti koliki je fluks vektora B koji generiše kružna kontura sa strujom I kroz otvorenu površ ograničenu tom strujnom konturom. Ukoliko se smatra da je strujna kontura beskonačno tanka, na osnovu formule 2.36. se vidi da vektor B na infinitezimalnom rastojanju od konture teži beskonačnosti. Stoga je potrebno uzeti u obzir i konačne dimenzije provodnika, kao i raspodelu struje po poprečnom preseku provodnika, što kao ishod daje složenu formulu u kojoj se koriste eliptički integrali i koja je nepraktična za primenu. Iz tog razloga, formulisano je više empirijskih formula koje pod određenim uslovima daju vrednost fluksa sa zanemarivom greškom, i u kojima se fluks dobija kao

$$\Phi(I, R, r) = G(R, r) \cdot I \quad (2.51)$$

gde je r poluprečnik provodnika koji čini strujnu konturu, R poluprečnik konture, a $G(R, r)$ izraz koja zavisi od parametara r i R . Jedna od takvih formula koja daje grešku manju od 1% kada je $R > 5r$ ima oblik:

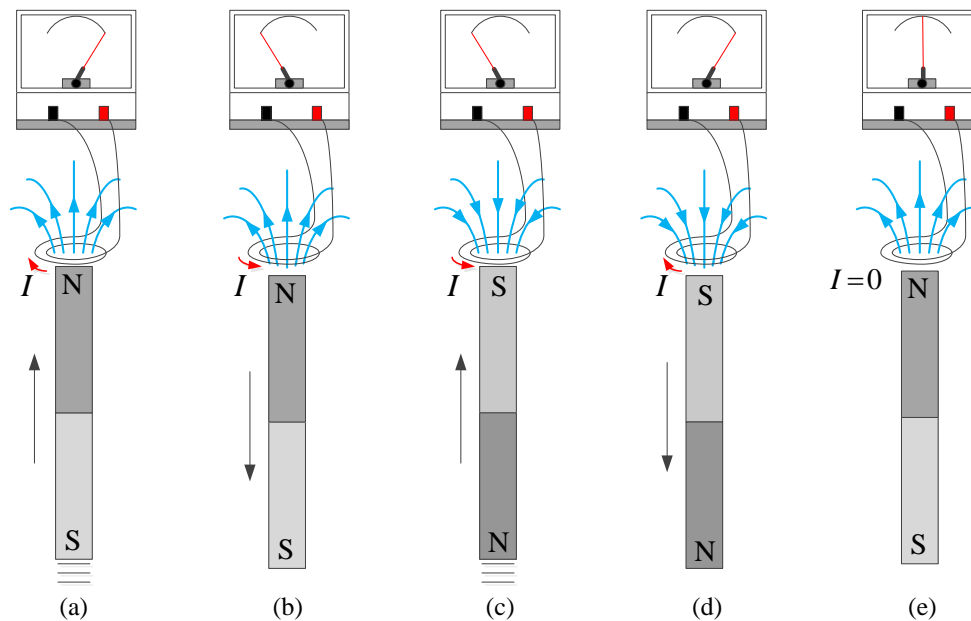
$$\Phi(I, R, r) = \mu_0 R (\ln(8R/r) - 1.75) \cdot I . \quad (2.52)$$

2.5. Elektromagnetska indukcija

U prethodnom poglavlju razmatrali smo neke osnovne zakonitosti nepromenljivog magnetskog polja prouzrokovanog konstantnim strujama ili stalnim magnetima. U ovom poglavlju ćemo razmatrati elementarne zakonitosti promenljivog magnetskog polja.

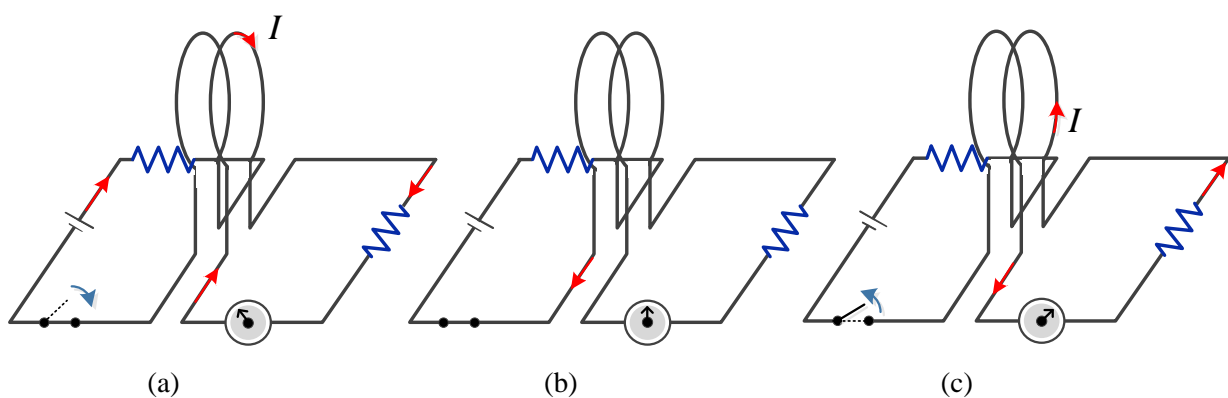
Već u osamanestom veku istraživači su razmatrali uticaj promenljivog magnetskog polja na provodnike. Jedan od prvih značajnih eksperimenata na osnovu kog je analiziran taj uticaj realizovao je 1831. godine Majkl Faradej (*Michael Faraday* 1791 -1867). Eksperiment je pokazivao efekat promene položaja stalnog magneta u odnosu na nepokretnu strujnu konturu, slika 2.5.1. Formirana je strujna kontura čiji su krajevi povezani na galvanometar- uređaj koji metri protok naelektrisanja. Indikacija smera i količine protoka naelektrisanja je ekvivalenta smeru i veličini skretanja igle galvanometra. U zavisnosti od toga koji pol magneta je okrenut prema strujnoj konturi, u slučaju primicanja i odmicanja stalnog magneta, konstatovano je da se

kroz konturu generisao protok naelektrisanja, u jednom ili drugom smeru, slika 2.20. Pri tome je količina proteklog naelektrisanja zavisila i od brzine pomeranja magneta, što je brzina bila veća, protekla količina naelektrisanja je bila veća.



Slika 2.20. Pomeranje magneta u odnosu na konturu stvara protok naelektrisanja kao što je prikazano (a – d). Isti efekat bi se postigao pomeranje konture u odnosu na magnet. Kratkotrajni protok naelektrisanja je prisutan samo tokom kretanja. Što je veća brzina, veći je i protok naelektrisanja. Kada nema kretanja nema ni protoka naelektrisanja, kao što je prikazano u (e).

Na osnovu tog, konstatovano je da promenljivo magnetsko polje proizvodi struju u provodnicima. Faradej je otkrio i efekat da promena struje u jednoj strujnoj konturi može prouzrokovati struju u drugoj strujnoj konturi, ukoliko su one postavljene u odgovarajući položaj jedna prema drugoj, slika 2.21.



Slika 2.21. a) Kada se prekidač zatvori igla ampermetra kratkotrajno skreće na jednu stranu. b) nakon skretanja, ugla se vraća u prvobitni položaj. c) Kada se prekidač otvori, igla kratkotrajno skreće na suprotnu stranu.

2.5.1. Faradejev zakon i Lencovo pravilo. Induktivnost

Na osnovu izvedenih eksperimenata Faradej je formulisao *Faradejev zakon elektromagnetske indukcije*: indukovana elektromotorna sila (napon) v_{ind} je jednak je negativnoj promeni magnetskog fluksa kroz otvorenu površinu S koju ograničava strujna kontura u jedinici vremena. Svaka promena u magnetskom polju, promena orijentacije ili površine S koju **ograničava** posmatrana provodna kontura u odnosu na magnetsko polje, indukuje napon v_{ind} :

$$v_{ind}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.53)$$

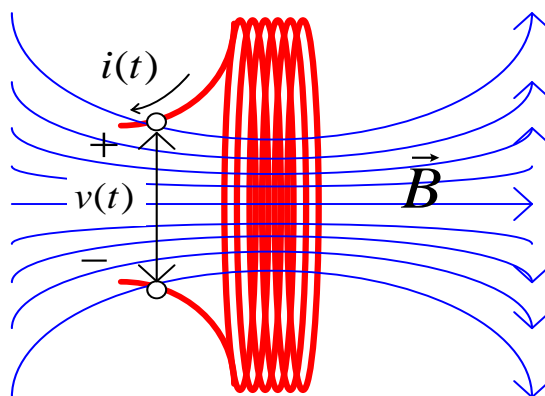
Ukoliko se strujna kontura sastoji od N navojaka žice tada se u svakom navojku generiše napon po formuli 2.52. Kako ima ukupno N navojaka, ukupno indukovani napon iznosi

$$v_{Nind}(t) = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.54)$$

Moduo izraza 2.52 je često, bar aproksimativno, lako odrediti, što se ne može reći i za znak. U velikom broju slučajeva, znak je lakše odrediti primenom Lencovog pravila koje glasi: smer indukovane elektromotrone sile je uvek takav da se suprotstvalja promeni magnetskog polja koje uzrokuje tu elektromotornu silu. Drugim rečima ako se fluks kroz jednu strujnu konturu smanjuje, indukovani napon u konturi će težiti da prouzrokuje takvu struju koja će proizvesti magnetsko polje takvo da se fluks ne smanjuje. Simetričan iskaz važi za povećanje fluksa.

Na slici 2.22. prikazan je kalem od N tesno priljubljenih navojaka kroz koje protiče promenljiva struja $i(t)$. Struja svakog od namotaja generiše i promenljivo magnetsko polje $B(i(t))$ pa je ukupno polje jednako $NB(i(t))$. Ukupan fluks kroz površinu ograničenu namotajima jednak $\Phi_N(t)=N\Phi(t)$, gde $\Phi(t)$ fluks koji generiše samo jedan namotaj. Kako kroz namotaje postoji promenljivi fluks, prema Faradejevom zakonu na krajevima namotaja indukovaće se promenljivi napon saglasan formuli 2.53:

$$v(t) = -N \frac{d\Phi_N}{dt} = -N^2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.55)$$



Slika 2.22. Kalem od N bliskih navojaka kroz koji protiče promenljiva struja $i(t)$. Ukoliko bi se struja $i(t)$ smanjila, napon $v(t)$ bi se povećao da bi se prema Lencovom pravilu kompenzovalo smanjenje struje

Kada je geometrija provodnika nepromenljiva izraz $G(R,r)$ iz formule 2.50 je konstanta G , pa je izraz 2.54 proporcionalan struji

$$v(t) = -N^2 G \cdot \frac{di(t)}{dt}, \quad (2.56)$$

Proizvod $N^2 G$ u izrazu 2.55 predstavlja konstantu proporcionalnosti, naziva se induktivnosti kabela i obeležava sa L :

$$v(t) = -L \cdot \frac{di(t)}{dt}. \quad (2.57)$$

Primetimo da referentni smerovi struje i napona na slici 2.22 nisu usaglašeni. U slučaju usaglašениh smerova napona i struje ne bi postojao negativan predznak u prethodna dva izraza. Mera veličine induktivnosti je opisana jedinicom Henri [H] pri čemu je

$$1 \text{ H} = \frac{\Omega}{\text{Hz}} = \Omega \cdot \text{s}. \quad (2.58)$$

Primer 2.8. Induktivnost solenoida kod koga je $R \ll l$

U slučaju solenoida kroz koji protiče struja $i(t)$, i za koji važi da je $R \ll l$, aproksimativno se može usvojiti da je vektor magnetske indukcije B dat izrazom 2.45 konstantan po celoj površini njegovog poprečnog preseka S . U tom slučaju fluks kroz jedan namotaj iznosi

$$\Phi = B(0) \cdot S = \frac{\mu_0 N \cdot i(t)}{l} \cdot S. \quad (2.59)$$

Na osnovu formula 2.55 i 2.56 dobija se da je induktivnost takvog solenoida

$$L = \mu_0 N^2 \cdot \frac{S}{l}. \quad (2.60)$$

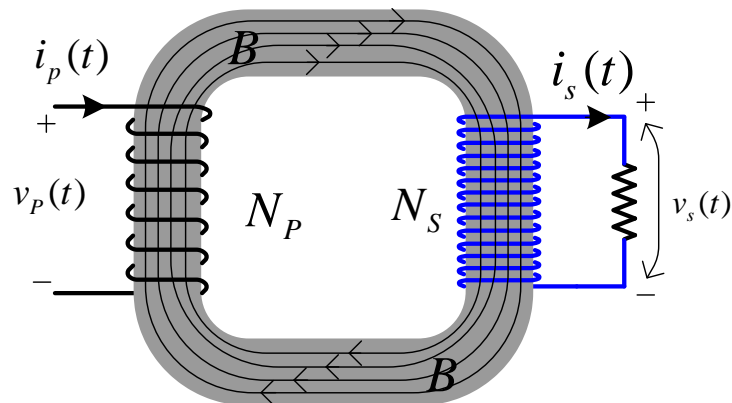
2.5.2. Transformatori

Jednostavnija forma transformatora sastoji se od feromagnetskog jezgra velike relativne permeabilnosti $\mu_r \gg 1$, i dva namotaja žice sa N_P i N_S zavojaka. Namotaji su Principijelan šema takvog transformatora prikayana je na slici 2.23. Na krajevima jednog namotaja povezan je potrošač i taj namotaj se obično naziva sekundar. Na krajevima suprotnog namotaja povezana je pobuda, i taj namotaj se obično naziva primar. Struje koje protiču kroz namotaje generišu magnetsko polje koje je zbog velike permeabilnosti jezgra skoncentrisano gotovo isključivo u jezgru. Stoga su linije magnetskog polja približno ograničene na prostor unutar jezgra što znači i da je fluks vektora B jednak u svakom poprečnom preseku jezgra. Iz navedenih razloga se jezgro ponekad naziva i koncentrator magnetskog fluksa. Namotaji transformatora na slici su motani u istom smeru tako da povećanje struje u primarnom namotaju, a koje prouzrokuje povećanje fluksa u jezgru, prema Lencovom pravilu dovodi do povećanja struje u sekundarnom namotaju što kompenzuje povećanje fluksa.

Ulazni napon $v_p(t)$ na krajevima primarnog namotaja zavisi prema Faradejevom zakonu od negativne promene fluksa kroz jezgro. Kako je broj primarnih namotaja N_P , indukovani napon na krajevima primarnog namotaja iznosi

$$v_p(t) = -N_P \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.61)$$

Napon na krajevima sekundarnog namotaja je iz istog razloga



Slika 2.23. Principijska šema transformatora sa primarnim i sekundarnim namotajem. Na sekundarnoj strani referentni smerovi su usaglašeni prema naponu i struji potrošača.

$$v_s(t) = -N_S \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.62)$$

Eliminacijom izvoda fluksa po vremenu iz prethodne dve jednačine dobija se da je

$$v_s(t) = \frac{N_S}{N_P} v_p(t) \quad (2.63)$$

Pogodnim odnosom broja navojaka može se postići da je napon na sekundaru veći ili manji od napona na primaru. Ako se usvoji da je sistem bez energetske gubitaka, snaga uložena na primaru jednaka je snazi koja se na sekundaru predaje potrošaču

$$v_s(t) \cdot i_s(t) = v_p(t) \cdot i_p(t). \quad (2.64)$$

Iz toga proizilazi da je

$$i_s(t) = \frac{N_P}{N_S} i_p(t). \quad (2.65)$$

Prikazane formule važe za slučaj motanja navojaka u istom smeru. Ukoliko navojci primara i sekundara nisu motani u istom smeru, tada će u formulama 2.62 i 2.64 postojati predznak minus.

Transformator se ponaša ne samo kao transformator napona i struje već i kao transformator otpornosti (impedanse). Ako se uzme u obzir da je

$$i_s(t) = v_s(t) / R_s, \quad (2.66)$$

dobija se da je

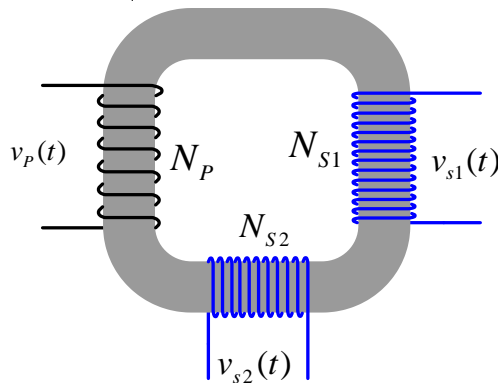
$$v_p(t) = i_p(t) \left(\left(\frac{N_P}{N_S} \right)^2 R_S \right). \quad (2.67)$$

Smisao prethodne formule je da pobudni napon $v_p(t)$ vidi preslikanu transformisanu otpornost koja je jednaka

$$R_p = \left(\frac{N_P}{N_S} \right)^2 R_S. \quad (2.68)$$

Ukoliko na sekundar transformatora nije povezan potrošač, tada primar transformatora predstavlja običan kalem sa feromagnetskim jezgrom čija je induktivnost proporcionalna kvadratu broja primarnih navojaka. Iako je moguće teorijski odrediti induktivnost takvog kalema, ona se u praksi dovoljno tačno računa preko empirijskih formula, a još lakše se meri. Ta induktivnost se obično naziva induktivnost magnetizacije L_m i treba je uzeti u obzir u slučajevima kada naponska pobuda na primaru nije idealna.

Na principu koncentracije fluksa moguće je projektovati složene konstrukcije sa više namotaja i sa različitim geometrijskim strukturama jezgra. Takve konstrukcije se u elektrotehnici nazivaju magnetska kola, i postoje razrađene metodologije njihove analize i sinteze. Za takva kola je karakteristična robustnost i pouzdanost – mogu na da funkcionišu u uslovima u kojima poluprovodnička elektronika ne može da funkcioniše. Primer jednog takvog kola je transformator sa dva sekundara, slika 2.24.



Slika 2.24. Principialna šema transformatora sa primarnim i dva sekundarna namotaja.

Za takav transformator važe slične jednačine kao za transformator sa jednim sekundarom:

$$v_{sk}(t) = \frac{N_{Sk}}{N_P} v_p(t), \quad k = 1, 2, \quad (2.69)$$

$$i_{sk}(t) = \frac{N_P}{N_{Sk}} i_p(t), \quad k = 1, 2. \quad (2.70)$$

Slične jednačine bi važile i za transformator sa više od dva sekundara.

2.6 Modelovanje električnih sistema

Modelovanje je proces uprošćenog predstavljanja realnog fizičkog sistema na način koji omogućava primenu matematičkih tehnika za analizu takvog sistema. Uprošćavanje predstave sistema se izvodi usvajanjem izvesnih pretpostavki kojima se zanemaruju nebitna svojstva.

U analizi električnih kola jedna od najvažnijih uprošćavajućih pretpostavki je da su osnovne karakteristike kola koncentrisane u pojedinačne blokove (električne elemente), koji su povezani idealnim provodnicima. Takva pretpostavka je opravdana sve dok učestanost signala nije suviše visoka, tj. manja je od mikrotalasnih učestanosti.

2.6.1. Pojam idealnog električnog elementa

Idealni električni elementi su kompletno opisani matematičkom relacijom između napona na elementu i struje kroz element i nije ih moguće opisati preko drugih elemenata. Crteži električnih elemenata se nazivaju električni simboli.

2.6.2. Idealni pasivni električni elementi

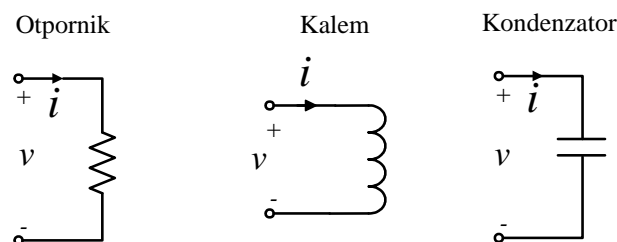
Osnovni idealni pasivni električni elementi su *otpornik*, *kalem* i *kondenzator*. Oni su opisani matematičkim relacijama:

$$v = Ri \quad v = L \frac{di}{dt} \quad v = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.71)$$

ili

$$i = \frac{1}{R} v \quad i = \frac{1}{L} \int v dt \quad i = C \frac{dv}{dt} \quad (2.72)$$

i predstavljeni simbolima kao na slici 2.23:



Slika 2.23: Osnovni idealni pasivni elementi.

Otpornik predstavlja komponentu kod koje se energija koja se predaje elementu pretvara u toplotu ili svetlosnu energiju. Konstanta R u definicionim relacijama predstavlja *otpornost* otpornika (jedinica Om - Ω).

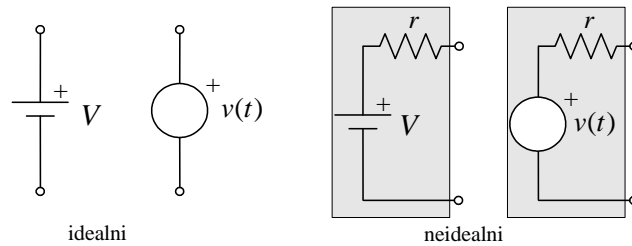
Kalem predstavlja komponentu kod koje se energija koja se predaje elementu pretvara u magnetsko polje. Konstanta L u definicionim relacijama predstavlja *induktivnost* kalema (jedinica Henri - H).

Kondenzator predstavlja komponentu kod koje se energija koja se predaje elementu pretvara u električno polje. Konstanta C u definicionim relacijama predstavlja *kapacitivnost* kondenzatora (jedinica Farad - F).

Ova tri pasivna elementa, zajedno sa izvorima koji će biti definisani u narednim odeljcima, omogućavaju da se predstavi i analizira vrlo širok krug električnih i elektronskih kola.

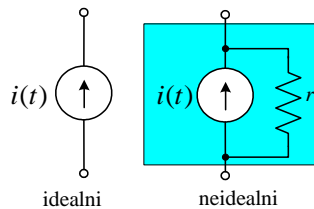
2.6.3 Nezavisni električni izvori (generatori)

Idealni *nezavisni naponski izvor* je aktivni element koji održava napon između pristupa nezavisno od struje kroz njega. Vrednost napona nezavisnog naponskog izvora može biti konstantna V (kao kod elektrohemijjskih baterija), ili neka funkcija vremena $v(t)$. Simboli koji se koriste za predstavljanje idealnih naponskih izvora prikazani su na sl. 2.24. Znak $+$ pored simbola označava referentni polaritet napona izvora.



Slika 2.24: Idealni i neidealni nezavisni naponski izvori (generatori).

Idealni *nezavisni strujni izvor* je aktivni element koji održava struju između pristupa nezavisno od napona između pristupa. Vrednost struje nezavisnog strujnog izvora može biti konstantna I , ili neka funkcija vremena $i(t)$. Simbol koji se koristi za predstavljanje idealnog strujnog izvora prikazan je na sl. 2.25. Strelica u simbolu označava referentni smer struje izvora.



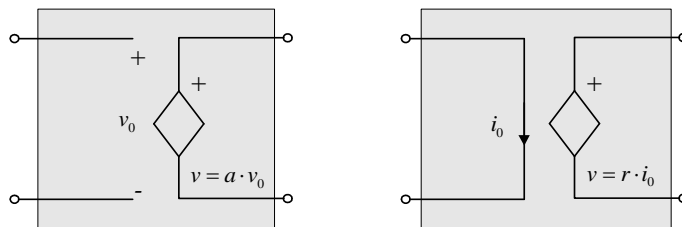
Slika 2.25: Idealni i neidealni nezavisni strujni izvor (generator).

Na primerima modela nezavisnih izvora mogu se lako uočiti uproćavanja prilikom modelovanja komponenti. Na primer, idealni naponski izvor održava napon $v(t)$ na svojim krajevima nezavisno od struje. Teorijski, struja bi mogla da bude i beskonačno velika, što bi izazvalo da takav izvor može generisati beskonačnu snagu. To je naravno fizički nemoguće. Dakle, idealni modeli komponenta predstavljaju važeće aproksimacije realnih komponenta samo pod izvesnim uslovima. Prva preciznija aproksimacija naponskih i strujnih generatora uzima u obzir i njihovu unutrašnju otpornost r , što je isto prikazano na slikama 2.24 i 2.25. Za takve generatore se često u literaturi može naći termin *realni generatori* (izvori), što je daleko od realnosti pa ćemo iz pedagoških razloga, u tekstu koji sledi, koristiti naziv *neidealni generatori* (izvori).

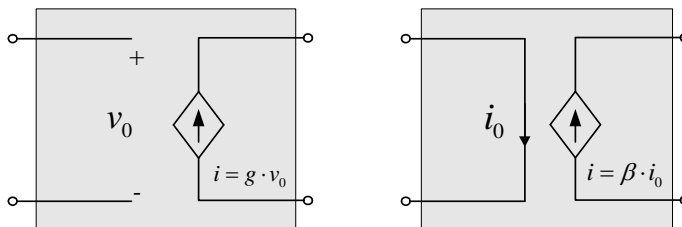
2.6.4. Idealni zavisni (kontrolisani) električni izvori (generatori)

Za razliku od nezavisnih izvora koji generišu neki napon (ili struju) nezavisno od toga šta se dešava u ostatku kola, idealni *zavisni izvori* generišu napon (ili struju) koja zavisi od nekog drugog napona ili struje u kolu. Ovakvi izvori su važni jer omogućavaju modelovanje mnogih elektronskih elemenata, kao što su, na primer, tranzistori.

Postoje 4 tipa idealnih zavisnih izvora, koji su prikazani na slikama 2.26 i 2.27. Kao što se vidi, zavisni izvori imaju četiri priključka. Ulazni krajevi (sa leve strane) predstavljaju veličinu koja *kontrolise* izvor, a izlazni krajevi (sa desne strane) predstavljaju izlaznu struju ili napon kontrolisanog izvora. Primetimo da su konstante a i β bezdimenzione konstante, jer se u prvom slučaju napon transformiše u napon, a u drugom slučaju se struja transformiše u struju. Konstanta a se naziva *naponsko pojačanje*, a konstanta β *strujno pojačanje*. S druge strane, konstante r i g su dimenzione konstante. Konstanta r ima dimenziju otpornosti pa se naziva *transrezistansa*, dok konstanta g ima dimenziju recipročnu otpornosti i naziva se *transkonduktansa*.



Slika 2.26: Naponski kontrolisani naponski izvor (NKNI) i strujno kontrolisani naponski izvor (SKNI).

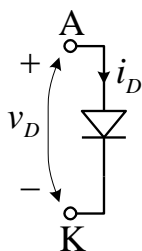


Slika 2.27: Naponski kontrolisani strujni izvor (NKSI) i strujno kontrolisani strujni izvor (SKSI).

2.6.5. Idealni nelinearni električni elementi

Od nelinearnih idealnih elemenata, definišaćemo samo idealnu diodu. Korišćenjem idealne diode i drugih osnovnih komponenti, moguće je sintetizovati osnovne modele složenijih komponenti koje će se koristiti u ovom udžbeniku.

Simbol za idealnu diodu je prikazan na slici 2.28. Kao i za linearne komponente, i za diodu se usvajaju usaglašeni referentni smerovi napona i struje. Idealna dioda se ne može opisati funkcionalnom zavisnošću već sistemom iskaza i grafikom koji pokazuje električno ponašanje.

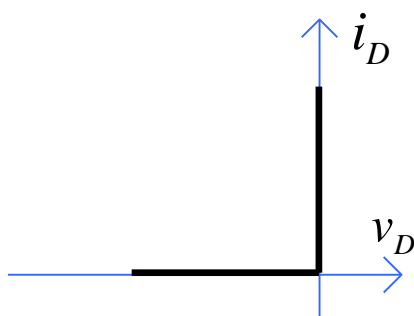


Slika 2.28. Električni simbol idealne diode. Priključci diode se zovu Anoda i Katoda.

Sistem formula koje opisuju idealnu diodu glasi:

$$\begin{aligned} i_D &= 0 \text{ za } v_D < 0; \\ v_D &= 0 \text{ za } i_D > 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

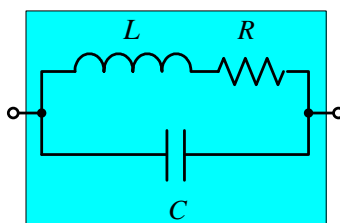
Ovaj sistem iskaza dopunjuje se grafikom 2.29 koji se naziva i strujno-naponska karakteristika idealne diode:



Slika 2.29 strujno-naponska karakteristika idealne diode: dioda ima dva stanja i jednom stanju predstavlja kratak spoj, u drugom stanju predstavlja otvorenu vezu

2.6.5. Složene električne komponente

Složene električne komponente (električne komponente) mogu da se modeluju na više načina ali je suština da se u osnovi svake električne komponente nalazi odgovarajuća veza osnovnih elemenata. Model električne komponente može da bude šematski, ali i sistem jednačina koje se dobijaju kombinacijom matematičkih izraza koji opisuju osnovne elemente. Na slici 2.30 je primer modela koji važi i za otpornik ali i za kalema na visokim učestanostima.

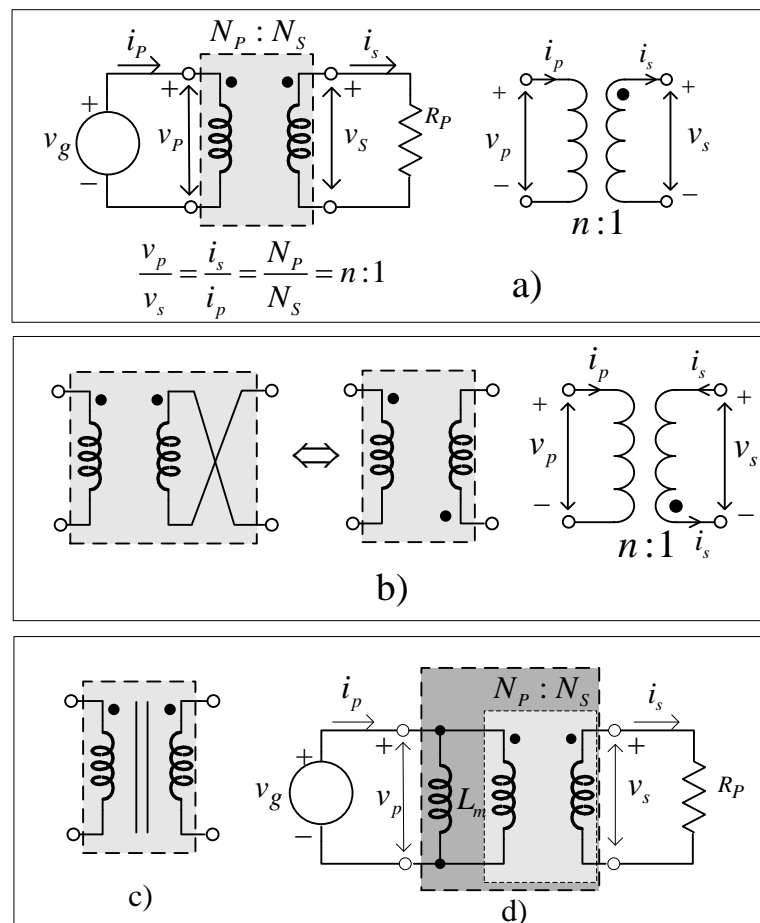


Slika 2.30. Model otpornika i kalema na visokim učestanostima

Tehnologija izrade metal-film i karbon-film otpornika podrazumeva nekoliko spiralnih namotaja odgovarajuće tanke otporne trake (filma) namotane oko cilindričnog keramičkog nosača. Kako se radi o spiralnim namotajima neizostavno će se pojaviti parazitna induktivnost

koja se modeluje kao kalem vezan na red sa otpornikom. Sa druge strane svaki namotaj zasebno nosi odgovarajuće naelektrisanje, a između namotaja postoji i razlika potencijala tako da se pojedinačni namotaji ponašaju kao elektrode kondenzatora. Ukupan efekat je da se ta parazitna kapacitivnost modeluje kao kondenzator povezan kao na slici 2.30.

U slučaju kalema, žica koja se koristi za namotaje ima malu ali konačnu otpornost, pa se ta parazitna otpornost modeluje kao mala otpornost povezana na red sa kalemom. Parazitna kapacitivnost ima isto poreklo i na isti način se modeluje kao u slučaju film otpornika.



Slika 2.31. Električni simboli transformatora sa jednim primarom i jednim sekundarom: a) sekundar motan u istom smeru kao primar, alternativni simboli, povezivanje pobude i potrošača ; b) sekundar motan u suprotnom smeru u odnosu na primar, alternativni simboli; c) simbol za transformator sa feromagnetskim jezgrom; d) model neidealnog transformatora sa uključenom magnetizacionom inductivnošću

Za praksu jako bitna električna komponenta je transformator. Kao komercijalna komponenta transformator se pojavljuje u verzijama koje su predviđene za snage od nekoliko mW do više desetina MW. Komercijalni transformatori u elementarnoj konfiguraciji predstavljaju fizičku implementaciju komponente sa slike 2.23.

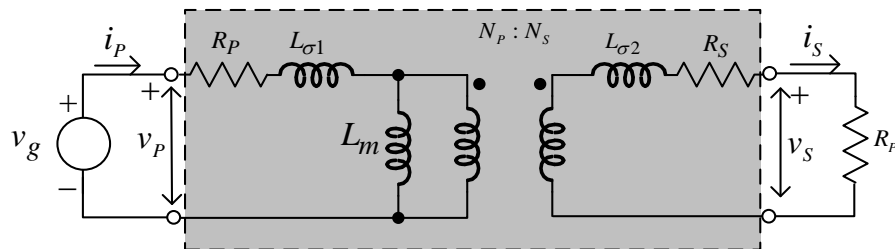
Iako se transformator se može modelovati pomoću kontrolisanih generatora, uobičajeno, je ali i jednostavnije da se električnom simbolu transformatora pridruži sistem jednačina, na primer 2.62 i 2.64. Ako su jednačine 2.63 i 2.65 jedine jednačine koje opisuju transformator, onda se radi o *idealnom transformatoru*. Električni simboli za idealni transformator sa jednim primarom i jednim sekundarom su prikazani na slici 2.31. Oznake za referentni smer struja i napona nisu sastavni deo simbola, već su dodati radi razjašnjenja opcija na simbolu. Tačke su

sastavni deo simbola i šematski prikazuju smer motanja sekundara. Prilikom korišćenja jednačina 2.62 i 2.64 treba voditi računa da je referenti smer sekundarne struje takav da ona “izlazi” iz tačke. Oznaka $n:1$ opisuje transformatorski odnos pri čemu n ne mora biti ceo broj:

$$n:1 = \frac{N_p}{N_s}. \quad (2.74)$$

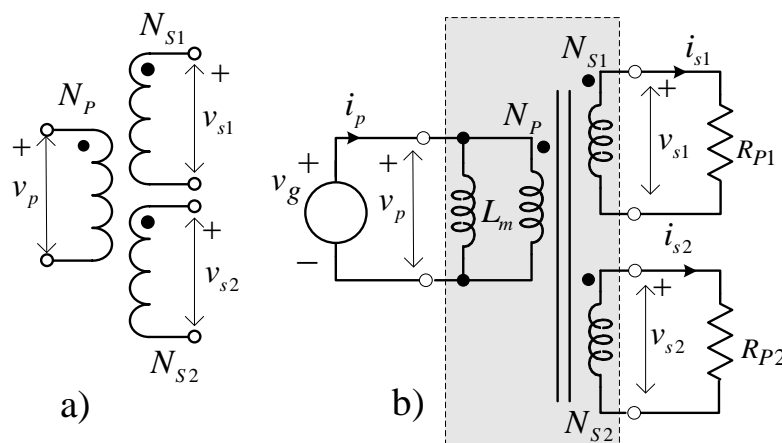
Ukoliko je bitno uzeti u obzir efekte feromagnetskog jezgra, onda se koristi simbol za transformator koji ističe tu činjenicu, slika 2.31 c). Ukoliko je potrebno uzeti u obzir induktivnost magnetizacije, onda se paralelno primaru dodaje kalem L_m slika 2.31 d).

Za neke preciznije analize kola sa transformatorima, često je potrebno uzeti u obzir i parazitne efekte koji utiču na rad transformatora i na višim učestanostima. Pošto je i jednostavan transformator složen elektromehanički sistem, detaljniji model može da sadrži i mnoštvo dodatnih komponenti kojima se modeluju pomenuti parazitni efekti. Uobičajeno je da se u tu svrhu uzme u obzir otpornost provodnika kojima su motani primarni i sekundarni navojci, kao i parazitne iduktivnosti takozvanog rasipanja, slika 2.32.



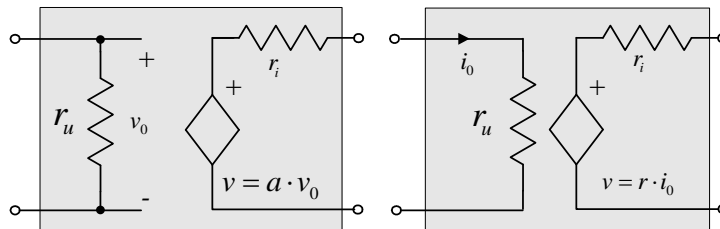
Slika 2.32. Model transformatora sa uključenim osnovnim parazitnim efektima

Simbol za transformator sa više sekundara je analogan simbolu transformatora sa jednim sekundarom. Na slici 2.33 a) prikazan je električni simbol idealnog transformatora sa dva sekundara dok je na slici 2.33 b) prikazan model transformatora sa feromagnetskim jezgrom i uključenom magnetizacionom induktivnošću.

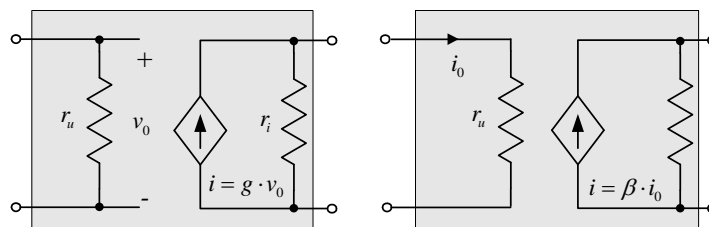


Slika 2.33. a) Električni simbol transformatora sa dva sekundara, b) model transformatora sa feromagnetskim jezgrom i uključenom magnetizacionom induktivnošću.

Za potrebe modelovanja pojačavača, bini električni elementi su i neidealni kontrolisani generatori. Oni se modeluju dodavanjem ulazne otpornosti r_u i izlazne otpornosti r_i na modele idealnih kontrolisanih generatora, slike 2.34, i 2.35:



Slika 2.34: Neidealni naponski kontrolisani naponski izvor i neidealni strujno kontrolisani naponski izvor. Dodate su ulazna otpornost r_u i izlazna otpornost r_i .



Slika 2.35: Neidealni naponski kontrolisani strujni izvor i neidealni strujno kontrolisani strujni izvor. Dodate su ulazna otpornost r_u i izlazna otpornost r_i .

2.6.6. Pojam mase.

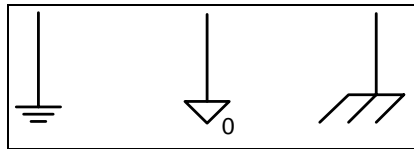
Pojam *mase* u elektrotehnici može da ima više značenja tako da ćemo se u ovom tekstu ograničiti na dva osnovna:

- *Signalna masa* ili *referentna masa* je podrazumevani termin u elektronici. To je pogodno odabran referentni provodnik u nekom električnom kolu za koji se usvaja da je na nultom potencijalu. Tada se napon između proizvoljne tačke A u kolu i signalne mase naziva *napon tačke A*, i jednak je potencijalu tačke A .
- *Sigurnosna masa* može da bude drugi tip mase. Sigurnosna masa predstavlja deo kola, ili drugih delova električnog uređaja, koji je fizički provodnikom povezan sa uzemljenjem javne elektrodistributivne mreže, odnosno sa Zemljom.

Često su ove dve vrste mase međusobno kratko spojene, pa se iz tog razloga i za jednu i za drugu koriste uprošćeni termini *masa*, *zemlja*, *uzemljenje*. Za masu postoji više različitih električnih simbola, neki od njih su prikazani na slici 2.36:

Jedno električno kolo može biti logički, ali i hardverski dekomponovano na više celina – blokova, koji se mogu zasebno analizirati i gde svaki blok može imati svoju signalnu masu. Takve mase mogu biti međusobno na različitim potencijalima, ali to nema efektivnog uticaja na analizu kola jer se svaki blok analizira nezavisno.

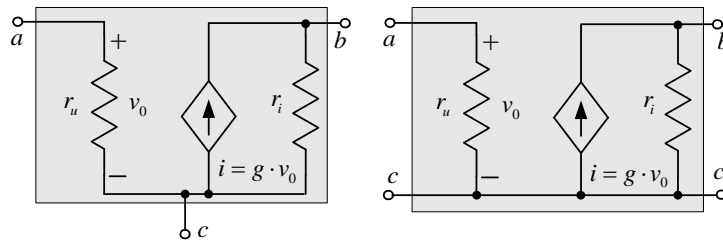
Iako se proizvoljan provodnik u kolu može usvojiti kao masa, uobičajeno je u elektronici da se masa dodeljuje negativnom priključku nekog od naponskih izvora u kolu.



Slika 2.36. Primer električnih simbola za masu

2.6.7. Elementarne komponente sa tri priključka. Komponente sa implicitnom masom

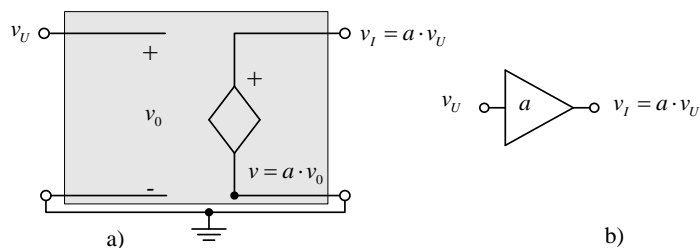
Složene modelovane komponente, kao i elementarne komponente razmatrane do sad u ovom poglavlju, imaju paran broj priključaka i opisuju se vezama između napona i struja. Pri tome se neki parovi priključaka mogu proglasiti da su ulazni, a neki drugi da su izlazni. Ali se uvek radilo o parovima. Međutim postoji potreba i za modelovanjem realnih komponenti sa neparnim brojem priključaka, konkretno sa tri. Da bi se za analizu ovakvih komponenti koristio isti matematički aparat kao i za komponente sa parnim brojem priključaka, jedan priključak se proglašava za *zajednički* i koristi se dvostruko, i za ulaz i za izlaz. Na slici 2.37, prikazan je primer naponsko strujnog pojačavača sa *zajedničkim c priključkom*.



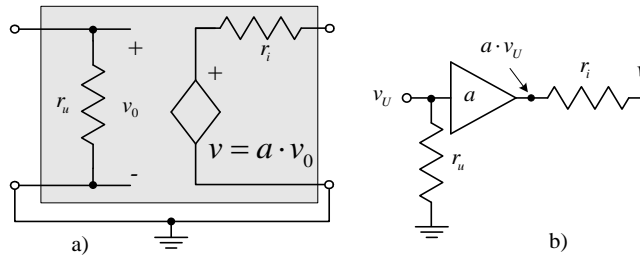
Slika 2.37: Model naponsko strujnog pojačavača kod koga je priključak *c zajednički*

Pošto se u elektronici podjednako koristi potencijal kao električna veličina, postoje elementi kod kojih se obrada signala prividno odvija na nivou potencijala. Takvi elementi u suštini nisu osnovni već su izvedeni, ali se često tretiraju i kao osnovni.

Kada se negativan ulazni i izlazni priključak NKNI povežu na masu slika 2.37a), dobija se kolo koje može da se tretira kao pojačavač potencijala. Takvo kolo se naziva *idealni naponski bafer* ili samo *bafer*. Koristi se i izraz pojačavač. Tada je nepraktično koristiti komplikovani simbol kao sa slike 2.37 a) već se koristi pojednostavljeni simbol koji je prikazan na slici 2.37b) i koji je opisan formulom koja povezuje dva potencijala, a podrazumeva se interna struktura kao sa slike 2.37 a) Ukoliko postoji ulazna ili izlazna otpornost one mogu da se eksterno dodaju na idealni naponski bafer, slika 2.38

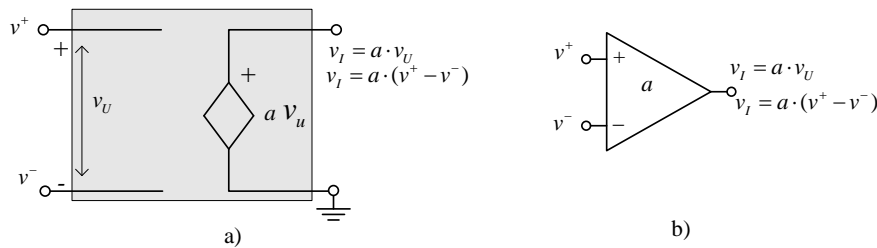


Slika 2.38 Idealni naponski bafer: a) realizacija preko NKNI; b) električni simbol bafera



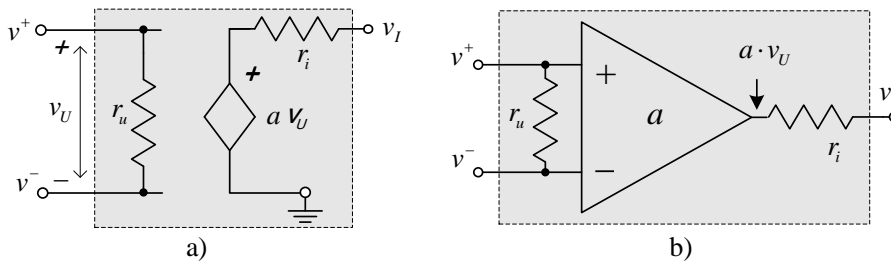
Slika 2.39 Neidealni naponski bafer: a) realizacija preko neidealnog NKNI; b) Model preko idealnog naponskog bafera

Kada je samo izlazni negativni priključak od NKNI povezan na masu, tada se dobija komponenta koja se zove *idealni naponski pojačavač* ili samo pojačavač, slika 2.39. Na istoj slici je prikazan i električni simbol:



Slika 2.40. Idealni naponski pojačavač: a) realizacija pomoću NKNI; b) električni simbol.

Ukoliko NKNI sadrži ulaznu ili izlaznu otpornost, one se u svrhu modelovanja mogu eksterno povezati na pojačavač, slika 2.40.



Slika 2.41. Neidealni naponski pojačavač: a) realizacija pomoću NKNI; b) model neidealnog naponskog pojačavača realizovanog pomoću idealnog naponskog pojačavača

Svakako da postoji mogućnost i da se samo negativni priključak ulaznog dela NKNI poveže na masu, ali tu varijantu nećemo razrađivati jer realna kola koja imaju potrebu za takvim vidom modelovanja prevazilaze okvire ove knjige.

Dakle iz NKNI koji procesira napon kao ulaznu informaciju i generiše napon kao izlaznu informaciju, izvode se komponente naponski bafer koji procesira potencijal na svom ulazu i generiše potencijal na svom izlazu, kao i naponski pojačavač koji procesira napon na svom ulazu, a generiše potencijal na svom izlazu. U kolima u kojima postoji definisan nulti referentni potencijal – masa, upotreba naponskih pojačavača i bafera znatno pojednostavljuje analizu i dizajn u odnosu na alternativno rešenje bazirano samo na NKNI.

Ako su bilo ulaz ili izlaz u formi potencijala, kaže se da se radi o jednostrukom (*single ended*) ulazu/izlazu. Ukoliko je procesirani signal u formi napona, tada se kaže da se radi o diferencijalnom ulazu/izlazu.

3. Kola sa stalnim jednosmernim strujama

Kola sa stalnim jednosmernim strujama koje ćemo za početak analizirati sastoje se samo od otpornika i nezavisnih izvora konstantnog napona ili struje. Jednačine koje opisuju takvo kolo su linearne, tako da se sistemi takvih jednačina mogu lako rešiti. Zbog jednostavnosti opisa, kod kola sa stalnim jednosmernim strujama lako je objasniti osnovne zakone, kao što su Omov zakon, prvi i drugi Kirhofov zakon.

3.1 Omov zakon

Omov zakon definiše zavisnost napona od struje kod otpornika i glasi: *Napon na otporniku je direktno proporcionalan struji kroz otpornik.*

$$V = RI \quad (1.1)$$


Slika 3.1: Omov zakon.

Konstanta proporcionalnosti R predstavlja *otpornost* otpornika. Jedinica za otpornost je Om (Ω). U praksi se otpornici prave nanošenjem metalnog ili ugljenog filma na keramičku podlogu, ili od žice velike specifične otpornosti. U integrisanim kolima se otpornici prave posebnim tehnikama koje su prilagođene proizvodnji ostalih poluprovodničkih komponenata. Tipične vrednosti otpornosti koje se sreću u elektrotehnici i elektronici se kreću od delova Ω do nekoliko $M\Omega$.

Provodnost otpornika G je recipročna vrednost otpornosti:

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.2)$$

Jedinica za provodnost je Simens (S). Omov zakon izražen preko provodnosti glasi:

$$I = GV \quad (1.3)$$

Otpornik je pasivni element koji apsorbuje snagu električne energije i pretvara je u toplotu. Snaga razvijena na otporniku je proizvod struje i napona:

$$P = VI \quad (1.4)$$

Primenom Omovog zakona, snaga na otporniku se može izraziti i primenom ekvivalentnih izraza:

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} = GV^2 = \frac{I^2}{G} \quad (1.5)$$

Specijalni slučajevi otpornosti:

$$R = 0 \quad (G = \infty) \quad (1.6)$$

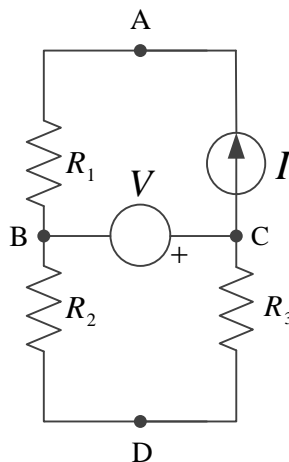
Ovaj slučaj se naziva *kratak spoj*. Napon između pristupa kod kratkog spoja je jednak nuli, a struja može imati ma kakvu vrednost.

$$G = 0 \quad (R = \infty) \quad (1.7)$$

Ovaj slučaj se naziva *otvorena veza*. Napon između pristupa kod otvorene veze može imati ma kakvu vrednost, a struja je jednaka nuli.

3.2 Električno kolo

Električno kolo predstavlja interkonekciju dva ili više elemenata. Povezivanje elemenata se vrši provodnicima čija se otpornost može zanemariti.



Slika 3.2: Primer jednog električnog kola.

Pre nego što formulišemo osnovne zakone koji opisuju ponašanje električnih kola, moramo se upoznati sa nekoliko definicija osnovnih termina:

Čvor kola je tačka spajanja priključaja dva ili više elemenata kola (A, B, C, D, na sl. 3.2).

Grana je deo kola koji neposredno spaja dva čvora i duž kog ne postoji grananje strujnog puta (AB, AC, BC, BD, CD, na sl. 3.2).

Petlja predstavlja ma koji zatvoreni put kroz kolo kod koga se kroz jedan čvor može proći samo jednom (ACBA, BCDB, ACDBA, na sl. 3.2).

Kontura predstavlja petlju koji ne sadrži u sebi neku drugu petlju (ACBA, BCDB, na sl. 3.2).

3.3 Prvi (strujni) Kirhofov zakon

Nemački fizičar Gustav Kirhof je još sredinom 19. veka formulisao dva osnovna zakona koji opisuju međusobne veze struja i međusobne veze napona u kolu.

Prvi Kirhofov zakon se odnosi na struje u kolu i glasi: *Algebarska suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je nuli.*

$$\sum_{j=1}^N I_j = 0 \quad (1.8)$$

gde je I_j struja j -te grane koja ulazi u čvor, dok je N broj grana koje ulaze u čvor. Po konvenciji se struje čija je referentna orijentacija ka čvoru uzimaju se sa pozitivnim predznakom, dok se struje čija je referentna orijentacija od čvora uzimaju sa negativnim predznakom.

Alternativna formulacija prvog Kirhofovog zakona glasi:

Suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je sumi struja koje ističu iz istog čvora.

3.4 Drugi (naponski) Kirhofov zakon

Drugi Kirhofov zakon se odnosi na napone u kolu i glasi: Algebarska suma napona u bilo kojoj petlji kola jednaka je nuli.

$$\sum_{j=1}^N V_j = 0 \quad (1.9)$$

gde je V_j napon na j -toj grani petlje koja ukupno ima N grana. Po konvenciji se naponi na granama čija je referentna orijentacija suprotna orijentaciji petlje uzimaju se sa pozitivnim predznakom, dok se naponi na granama čija je referentna orijentacija ista sa orijentacijom petlje uzimaju sa negativnim predznakom.

3.5 Paralelna i serijska veza otpornika

Prvi i drugi Kirhofov zakon koji omogućuju formiranje sistema jednačina čijim se rešavanjem mogu dobiti struje svih grana u kolu i svi naponi u kolu. Međutim, kada se primene na kola sa samo jednim parom čvorova, ili na kola sa samo jednom petljom, oni daju neke vrlo korisne rezultate, koji se mogu primeniti za uprošćavanje električnih kola.

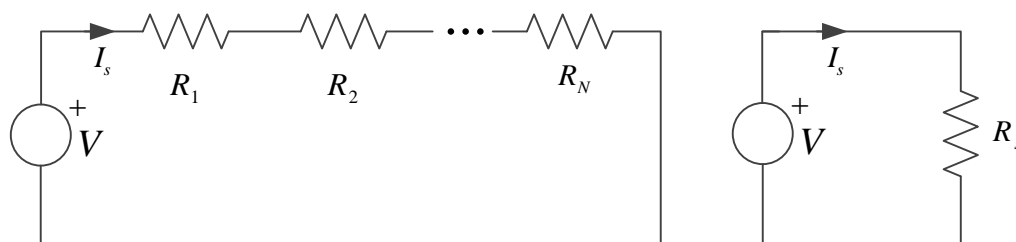
3.5.1 Serijska (redna) veza otpornika

Ako se N otpornika tako poveže tako da se u svakom čvoru stiču samo po dva otpornika (osim kod prvog i poslednjeg čvora), takva veza se naziva *serijska* ili *redna veza* otpornika i prikazana je na slici 3.3a. Za jedinu petlju u kolu se može napisati jednačina po drugom Kirhofovom zakonu:

$$V = R_1 I_s + R_2 I_s + \dots + R_N I_s = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) I_s \quad (1.10)$$

dok se za ekvivalentnu petlju na slici 3.3b može napisati:

$$V = R_s I_s \quad (1.11)$$



Slika 3.3: Serijska (redna) veza otpornika.

Ako su napon izvora i struja kroz izvor u oba kola isti, onda se za ekvivalentnu otpornost R_s dobija:

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (1.12)$$

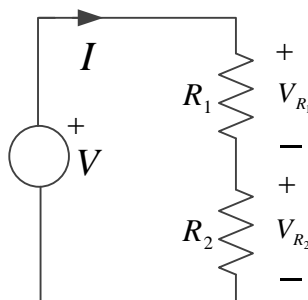
odnosno, *ekvivalentna otpornost serijski vezanih otpornika jednaka je zbiru pojedinačnih otpornosti.*

Posmatrajmo dva serijski vezana otpornika, kao na slici 3.4. Pošto kroz oba otpornika protiče ista struja i , naponi na serijski vezanim otpornicima su:

$$V_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V, \quad V_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \quad (1.13)$$

odnosno, *napon izvora V deli se između otpornika R_1 i R_2 u direktnoj srazmeri sa njihovim otpornostima.*

Ovakvo kolo se naziva *delitelj (razdelnik) napona* i često se primenjuje u elektronici.



Slika 3.4: Delitelj (razdelnik) napona.

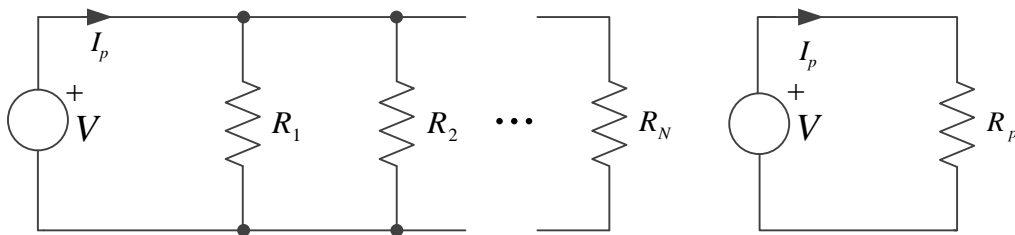
3.5.2 Paralelna veza otpornika

Ako se N otpornika tako poveže da svi imaju zajedničke priključke, takva veza se naziva *paralelna veza* otpornika i prikazana je na slici 3.5a. Za čvor u kome su povezani naponski izvor i svi otpornici se može napisati jednačina po prvom Kirhofovom zakonu:

$$I_p = G_1 V + G_2 V + \dots + G_N V = (G_1 + G_2 + \dots + G_N) V \quad (1.14)$$

dok se za ekvivalentni čvor na slici 3.5b može napisati:

$$I_p = G_p V \quad (1.15)$$



Slika 3.5: Paralelna veza otpornika.

Ako su napon izvora i struja kroz izvor u oba kola isti, onda se za ekvivalentnu otpornost G_p dobija:

$$G_p = G_1 + G_2 + \dots + G_N \quad (1.16)$$

odnosno, *ekvivalentna provodnost paralelno vezanih otpornika jednaka je zbiru pojedinačnih provodnosti*. Alternativni oblik prethodne jednačine je:

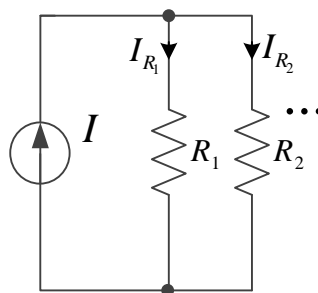
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad (1.17)$$

Posmatrajmo dva paralelno vezana otpornika, kao na slici 3.6. Pošto je napon na oba otpornika isti, struje kroz paralelno vezane otpornike su:

$$I_{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I, \quad I_{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (1.18)$$

odnosno, *struja izvora I deli se između otpornika R_1 i R_2 u obrnutoj srazmeri sa njihovim otpornostima*.

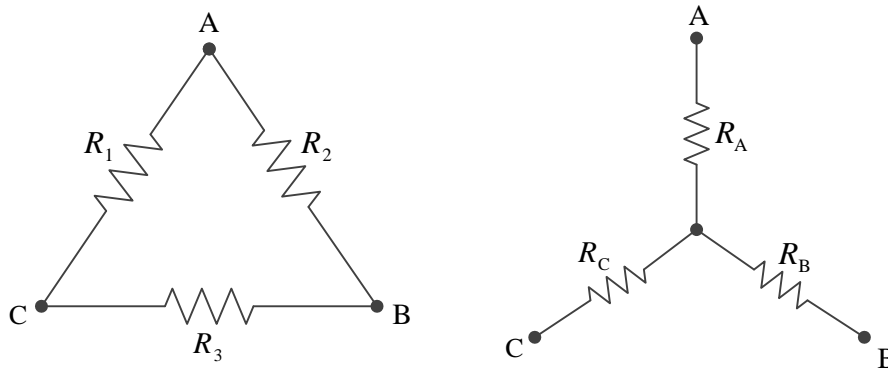
Ovakvo kolo se naziva *delitelj (razdelnik) struje* i često se primenjuje u elektronici.



Slika 3.6: Delitelj (razdelnik) struje.

3.6 Transformacije trougao – zvezda i zvezda - trougao

Još dve često korišćene transformacije u rešavanju električnih kola su transformacije trougla u zvezdu i obrnuto. Na slici 3.7 je prikazano vezivanje tri otpornika u trougao i zvezdu. U literaturi na engleskom jeziku ove transformacije su poznate kao $\Delta \rightarrow Y$, odnosno, $Y \rightarrow \Delta$.



Slika 3.7: Vezivanje otpornika u trougao (Δ) i zvezdu (Y).

Da bi ova dva kola bila ekvivalentna, otpornost između ma koje dve tačke u oba kola, kada se treća tačka ostavi nepovezana, mora biti ista. Dakle, korišćenjem pravila za paralelno i serijsko vezivanje otpornika, sa slike 3.7 se dobija:

$$\begin{aligned}R_{AB} &= R_A + R_B = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \\R_{BC} &= R_B + R_C = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \\R_{AC} &= R_A + R_C = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}\end{aligned}\quad (1.19)$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina po R_A , R_B i R_C , dobija se:

$$\begin{aligned}R_A &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\R_B &= \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\R_C &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}\end{aligned}\quad (1.20)$$

dok se rešavanjem sistema jednačina po R_1 , R_2 i R_3 , dobija:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} \\
 R_2 &= \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} \\
 R_3 &= \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

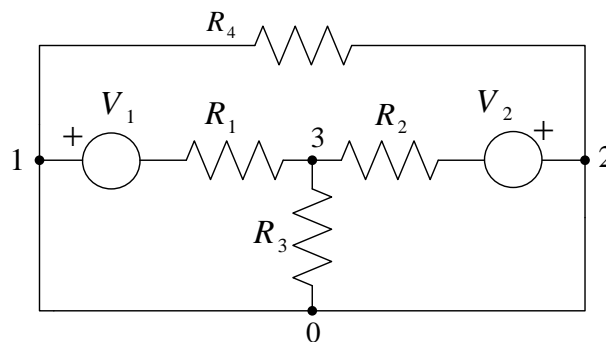
3.7 Algoritamsko rešavanje složenih kola

3.7.1. Rešavanje direktnom primenom Korhofovih zakona

Za potpuno rešenje električnog kola potrebno je odrediti struje kroz sve elemente i napone na svim elementima kola. Za njihovo određivanje možemo napisati sistem linearnih jednačina, koji se sastoji od jednačina po prvom Kirhofovom zakonu, jednačina po drugom Kirhofovom zakonu i u našem slučaju jednačina elemenata po Omovom zakonu. U slučaju kola sa složenijim komponentama koriste se i jednačine koje definišu električno ponašanje takvih komponenti. Prilikom formiranja sistema potreban broj jednačina po prvom Kirhofovom zakonu iznosi $n_\epsilon - 1$ gde je n_ϵ broj čvorova u kolu, do j je broj potrebnih jednačina po drugom Kirhofovom zakonu jednak $n_g - (n_\epsilon - 1)$, gde je n_g broj grana u kolu. Sledeći primer ilustruje primenu Kirhofovih zakona u rešavanju električnog kola.

Primer 3.1

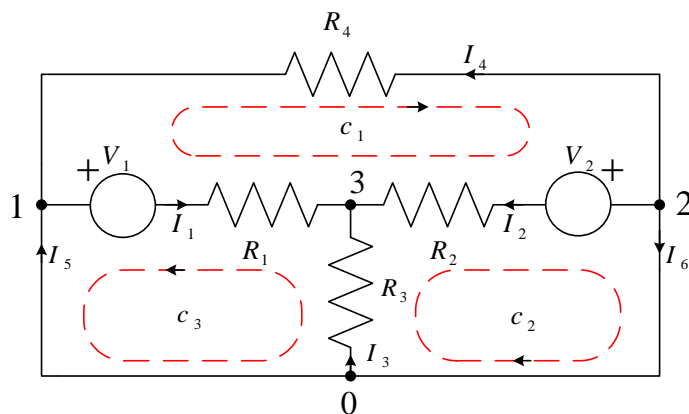
Rešiti kolo prikazano na slici 3.8 primenom Kirhofovih zakona ako su poznate vrednosti $V_1 = 1.5V$, $V_2 = 1.8V$, $R_{1,2,3,4} = 1k\Omega$.



Slika 3.8: Električno kolo sa dva pobudna generatora

Rešenje:

Ako su čvorovi određeni i numerisani kao na slici 3.8, broj čvorova u kolu je $n_\epsilon = 4$ a broj grana određenih čvorovima $n_g = 6$. Potrebno je napisati $n_\epsilon - 1 = 3$ jednačine za prvi Kirhofov zakon i $n_g - (n_\epsilon - 1) = 6 - 3 = 3$ jednačine za drugi Kirhofov zakon. Izabrani smerovi struja i kontura su prikazani na slici 3.9.



Slika 3.9: Kolo sa zadatim referentnim smerovima struja i kontura.

Jednačine za prvi Kirhofov zakon za čvorove 1, 2 i 3:

$$1: I_4 + I_5 - I_1 = 0$$

$$2: -I_4 - I_6 - I_2 = 0$$

$$3: I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Jednačine za drugi Kirhofov zakon za odabrane konture:

$$c_1: V_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 - V_1 - R_4 I_4 = 0$$

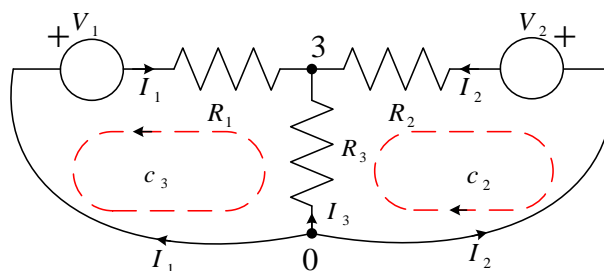
$$c_2: R_3 I_3 - R_2 I_2 - V_2 = 0$$

$$c_3: R_3 I_3 - R_1 I_1 - V_1 = 0$$

Oduzimanjem jednačine za konturu c_3 i dodavanjem jednačine za konturu c_2 , jednačini za konturu c_1 , dobija se vrednost struje I_4 :

$$c_1 - c_3 + c_2: I_4 = 0$$

Zamenom u jednačine 1 i 2 dobija se da je $I_5 = I_1$ i $I_6 = -I_2$ što znači da je sistem postavljenih jednačina predimenzionisan. Pažljivijim posmatranjem slike jednačina može se ustanoviti da su tačke 0, 1 i 2 na istom potencijalu jer su kratko spojene, i da je zbog toga struja $I_4 = 0$. Iz tih razloga kolo može da bude redukovano pa novo ekvivalentno kolo izgleda kao na slici 3.10.



Slika 3.10: Ekvivalentno kolo nakon uklanjanja grane sa otpornikom R_4 .

Od jednačina preostaju jednačine za čvor 3 i konture c_2 i c_3 . Kako sve otpornosti imaju istu vrednost biće obeležene sa R .

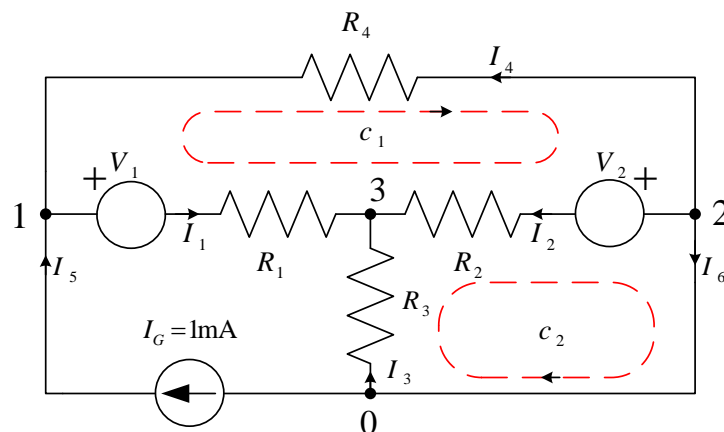
$$3: I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$c_2: I_3 - I_2 = \frac{V_2}{R}$$

$$c_3: I_3 - I_1 = \frac{V_1}{R}$$

Sabiranjem ovih jednačina dobija se vrednost $I_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{V_2 + V_1}{R} \right) = 1.1 \text{ mA}$, a potom zamenom u jednačine kontura c_2 i c_3 dobijaju se $I_1 = -0.4 \text{ mA}$ i $I_2 = -0.7 \text{ mA}$. Shodno tome su $I_5 = -0.4 \text{ mA}$ i $I_6 = 0.7 \text{ mA}$.

Ukoliko je u kolu u grani između čvorova 0 i 1 postavljen strujni izvor čija je struja 1 mA , kao što je prikazano na slici 3.11, umesto jednačine za konturu c_3 uzima se jednačina $I_5 = I_G = 1 \text{ mA}$. Struje u kolu su u tom slučaju $I_1 = 0.16 \text{ mA}$, $I_2 = -0.98 \text{ mA}$, $I_3 = 0.82 \text{ mA}$, $I_4 = -0.84 \text{ mA}$, $I_6 = 1.82 \text{ mA}$.



Slika 3.11: Primer kola sa strujnim generatorom u jednoj od grana.

Ovako formirani sistem ima veliki broj jednačina. Da bi se broj jednačina smanjio može se postupiti na dva načina. Prvi način je da se prvo odrede svi u kolu, a da se potom odrede struje kroz elemente na osnovu Omovog zakona. Drugi način je da se prvo odrede struje u kolu, pa tek onda naponi na elementima. U oba slučaja se broj jednačina u sistemu značajno smanjuje.

Određivanje svih napona u kolu moguće je preko određivanja potencijala svih čvorova u kolu. Algoritamski metod koji to omogućuje naziva se *metod potencijala čvorova*.

3.7.2. Metod potencijala čvorova

Može se pokazati da sistem jednačina koji se dobija direktnom primenom Kirhofovih zakona može biti redukovan. Da bi se to postiglo moguće je postupiti na dva načina. Prvi postupak je da se prvo odrede svi u kolu, a da se potom odrede struje kroz elemente na osnovu Omovog zakona. Drugi mogući postupak je da se prvo odrede struje u kolu, pa tek onda naponi na elementima. U oba slučaja se broj jednačina u sistemu značajno smanjuje. U elektronskim

kolima je broj čvorova obično znatno manji od broja elemenata, pa je prvi postupak formiranja jednačina korisniji.

Određivanje svih napona u kolu moguće je izvesti posredno, preko određivanja potencijala svih čvorova u kolu. Algoritamski metod koji to omogućuje naziva se *metod potencijala čvorova*.

Metod propisuje da se jedan čvor u kolu izabere za *referentni čvor*, za koji se usvaja da je na nultom potencijalu, dok se preostali naponi u kolu računaju u odnosu na njega. Referentni čvor se najčešće naziva *masa*.

Da bi se formirao sistem jednačina, prvo se za svaki čvor (osim za referentni) napiše odgovarajuća jednačina po prvom Kirhofovom zakonu, a zatim se struje koje utiču u čvor ili ističu iz čvora izraze preko napona čvorova i Omovog zakona. U slučaju kola sa n_ϵ čvorova, broj jednačina u sistemu je $n_\epsilon - 1$. Takav sistem jednačina se naziva *sistem jednačina napona čvorova*.

Po Omovom zakonu struja kroz otpornik između čvorova m i n je:

$$I_{mn} = \frac{V_m - V_n}{R} \quad (1.22)$$

Ova struja se pojavljuje samo u jednačinama po prvom Kirhofovom zakonu napisanom za čvorove m i n .

U slučaju kola sa $N = n_\epsilon$ čvorova, broj nepoznatih veličina (potencijala) u sistemu je $n_\epsilon - 1$, tj. isti je kao broj jednačina. Dakle, posle sređivanja napisanih jednačina, koje se sastoji u grupisanju članova koji odgovaraju istim nepoznatim potencijalima i prebacivanja konstantnih članova na desnu stranu jednačina, formirani sistem izgleda ovako:

$$\begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \dots + G_{1N-1}V_{N-1} &= I_1 \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \dots + G_{2N-1}V_{N-1} &= I_2 \\ \vdots & \\ G_{N-11}V_1 + G_{N-12}V_2 + \dots + G_{N-1N-1}V_{N-1} &= I_{N-1} \end{aligned} \quad (1.23)$$

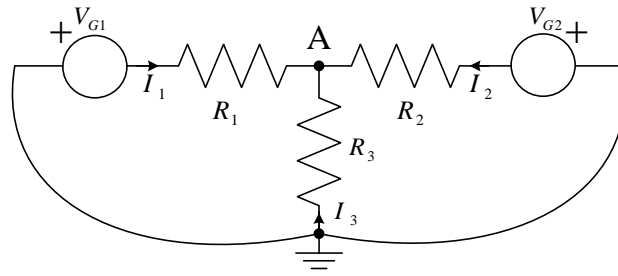
Ovaj sistem jednačina se može i direktno napisati na osnovu posmatranja kola, bez prethodnog formiranja jednačina po prvom Kirhofovom zakonu. Koeficijenti van glavne dijagonale G_{mn} , gde je $m \neq n$, predstavljaju zbir provodnosti svih grana između čvorova m i n i uvek imaju negativni predznak. Dijagonalni koeficijenti G_{kk} predstavljaju zbir provodnosti svih grana koje se stiču u čvor k i uvek imaju pozitivni predznak.

Primer 3.2

Rešiti kolo prikazano na slici 3.9. primenom potencijala čvorova ako su poznate vrednosti $V_1 = V_{G1} = 1.5V$, $V_2 = V_{G2} = 1.8V$, $R_{1,2,3,4} = 1k\Omega$.

Rešenje:

Potencijali tačaka 1 i 2 su jednaki potencijalu tačke 0 pa se kolo može pojednostaviti kao što je prikazano na slici 3.12



Slika 3.12: Ekvivalentna šema kola sa slike 3.1.3.

Potencijal u tački A se može napisati kao:

$$V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = -V_{G1} \frac{1}{R_1} - V_{G2} \frac{1}{R_2}$$

Pošto je $R_1 = R_2 = R_3$ dobija se $3V_A = -(V_{G1} + V_{G2}) \Rightarrow V_A = -1.1V$ a potom i vrednosti struja:

$$I_3 = \frac{(0 - V_A)}{R_3} = 1.1 \text{mA}$$

$$I_1 = \frac{(0 - V_{G1} - V_A)}{R_1} = \frac{(-1.5 + 1.1)}{1000} \text{A} = -0.4 \text{mA}$$

$$I_2 = \frac{(0 - V_{G2} - V_A)}{R_2} = \frac{(-1.8 + 1.1)}{1000} \text{A} = -0.7 \text{mA}$$

3.8 Linearna kola: principi superpozicije i homogenosti

U elektrotehnici i elektronici veliku primenu ima klasa *linearnih kola*. Da bi kolo bilo linearno mora zadovoljiti principe *superpozicije* i *homogenosti*.

Princip superpozicije tvrdi da se u jednom linearnom kolu sa više nezavisnih izvora, struja kroz ma koji element ili napon bilo kog čvora u kolu, može biti predstavljen kao algebarski zbir doprinosa pojedinačnih izvora. Prilikom određivanja doprinosa jednog izvora, preostali nezavisni naponski izvori moraju biti zamenjeni kratkim spojevima, a preostali nezavisni strujni izvori se moraju zameniti otvorenim vezama. Zavisni izvori ostaju neizmenjeni u kolu.

Iako primena principa superpozicije zahteva višestruko rešavanje sistema jednačina, sistemi jednačina koji se dobijaju posle anuliranja preostalih nezavisnih izvora su često znatno jednostavniji, pa njihovo rešavanje ne predstavlja problem.

Princip homogenosti tvrdi da ako se u jednom linearnom kolu neki nezavisni izvor pomnoži (skalira) nekom konstantom, onda se njegovi doprinosi strujama i naponima u kolu množe istom konstantom.

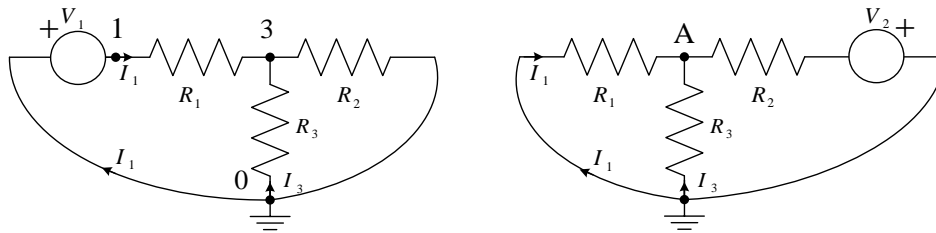
Dokaz ovih principa sledi iz linearnosti sistema jednačina koje opisuju kolo.

Primer 3.3.

Rešiti kolo prikazano na slici 3.12. koristeći teoremu superpozicije ako su poznate vrednosti $V_1 = 1.5V$, $V_2 = 1.8V$, $R_{1,2,3,4} = 1k\Omega$.

Rešenje:

Pošto u kolu postoje dva generatora ono se može razdvojiti na dva kola kao na slici 3.13.



Slika 3.13: Princip superpozicije

Struja I_1 u prvom kolu je jednaka:

$$I_1' = \frac{-V_1}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = -\frac{1.5V}{1.5k\Omega} = -1mA.$$

Struja I_1 u drugom kolu je jednaka:

$$I_1'' = \frac{-V_A}{R_1} = -\frac{1}{R_1} \left(-V_2 \frac{R_1 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_3 + R_2} \right) = \frac{1}{1k\Omega} \left(V_2 \frac{0.5k\Omega}{1.5k\Omega} \right) = 0.6mA.$$

Ukupna struja $I_1 = I_1' + I_1'' = -0.4mA$. Na sličan način se dobija:

$$I_2'' = \frac{-V_2}{R_2 + R_1 \parallel R_3} = -\frac{1.8V}{1.5k\Omega} = -1.2mA$$

$$I_1' = \frac{-V_3}{R_2} = -\frac{1}{R_2} \left(-V_1 \frac{R_2 \parallel R_3}{R_2 \parallel R_3 + R_1} \right) = \frac{1}{1k\Omega} \left(V_1 \frac{0.5k\Omega}{1.5k\Omega} \right) = 0.5mA$$

Ukupna struja $I_2 = I_2' + I_2'' = -0.7mA$, odakle je na kraju $I_3 = -I_2 - I_1 = 1.1mA$.

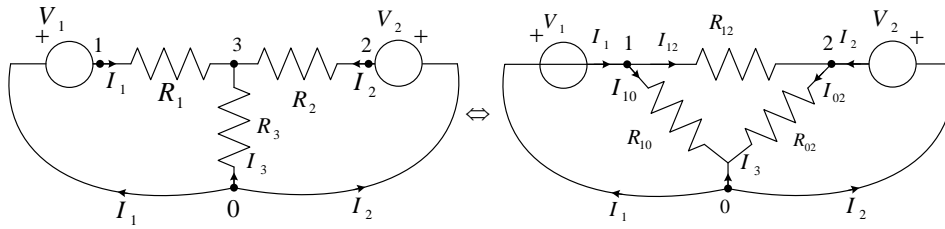
Interesantno je uporediti složenost ovog, a i prethodnih postupaka za rešavanje kola sa direktnom primenom Omovog zakona na transformisano kolo, što će biti ilustrovano sledećim primerom

Primer 3.4

Rešiti kolo prikazano na slici 3.12. koristeći transformaciju zvezde u trougao ako su poznate vrednosti $V_1 = 1.5V$, $V_2 = 1.8V$, $R_{1,2,3,4} = 1k\Omega$.

Rešenje:

Otpornička zvezda se može transformisati u trougao kao što je prikazano na slici 3.14.



Slika 3.14: Transformacija zvezde u trougao.

S obzirom da važi da je $R_1 = R_2 = R_3$ sledi da je $R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = 3k\Omega = R_{02} = R_{10}$.

Sada je očigledno da je $I_{10} = -\frac{V_1}{R_{10}} = -0.5\text{mA}$, $I_{02} = -\frac{V_2}{R_{02}} = -0.6\text{mA}$ i $I_{12} = \frac{-V_1 + V_2}{R_{12}} = 0.1\text{mA}$ a zatim i da je $I_3 = -I_{10} - I_{02} = 1.1\text{mA}$, $I_1 = I_{10} + I_{12} = -0.4\text{mA}$ i $I_2 = I_{02} - I_{12} = -0.7\text{mA}$.

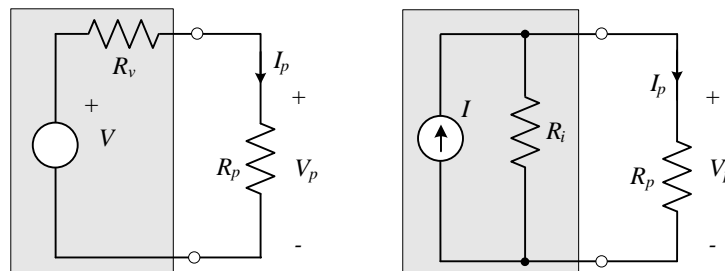
Vidi se da u ovom konkretnom slučaju najjednostavniji postupak je transformacija kola ekvivalentiranjem zvezde u trougao. Naravno, to generalno ne važi.

3.9 Transformacija izvora

U električnim kolima kojima se modeluju realna kola, retko se sreću neidealni naponski i strujni izvori, jer se njihova neidealnost uglavnom može zanemariti. Isto važi i za pojačavačka kola u kojima se pojavljuju kontrolisani izvori. Ipak, u slučajevima kada se te neidealnosti moraju uzeti u obzir, često je pogodno koristiti mogućnost *transformacije izvora*.

Neka neidealni naponski izvor, prikazan na slici 3.15, ima konačnu unutrašnju otpornost R_V . Neka neidealni strujni izvor, takođe prikazan na slici 3.15, ima konačnu unutrašnju provodnost $G_i = 1/R_i$.

U cilju uprošćenja kola, ponekad je pogodno pretvoriti strujni izvor u ekvivalentni naponski izvor i obrnuto. Do uslova ekvivalencije se lako može doći posmatranjem slike 3.15.



Slika 3.15: Transformacija neidealnog strujnog i naponskog izvora.

Ako se na neidealni strujni ili naponski izvor priključi isti otpornik proizvoljne otpornosti R_p , onda u slučaju ekvivalentnih izvora struja kroz otpornik R_p mora biti isti u oba kola. Po Omovom zakonu, onda je isti i napon na otporniku R_p . Dakle, iz uslova jednakosti struja kroz R_p sledi:

$$I_p = \frac{1}{R_v + R_p} V = \frac{R_i}{R_i + R_p} I \quad (1.24)$$

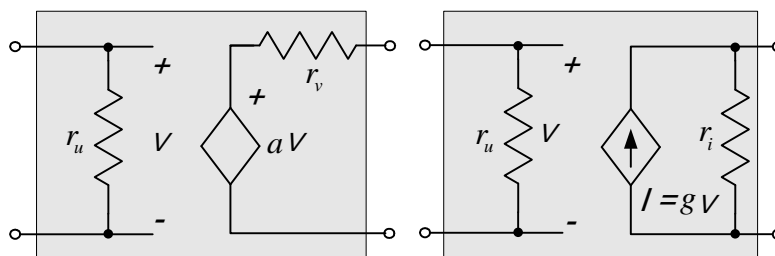
odakle se direktno dobijaju uslovi ekvivalencije realnog naponskog i strujnog izvora:

$$V = R_i I, \quad R_v = R_i \quad (1.25)$$

Dakle, ako u kolu imamo strujni izvor struje I i njemu paralelno vezan otpornik R , onda se ova kombinacija može zameniti ekvivalentnim naponskim izvorom napona $V = RI$ i serijski vezanim otpornikom R . Takođe važi i obrnuto: ako u kolu imamo naponski izvor napona V sa serijski vezanim otpornikom R , onda se ova kombinacija može zameniti ekvivalentnim strujnim izvorom struje $I = V/R$ i njemu paralelno vezanim otpornikom R . Ostali parametri kola u kome se nalaze nezavisni izvori ostaju nepromenjeni.

Transformacija izvora je primenljiva i na kontrolisane generatore gde se generator koji se transformiše privremeno smatra nezavisnim, slika 3.16, i tu važi ekvivalencija

$$r_v = r_i, \quad a = r_i g \quad (1.26)$$



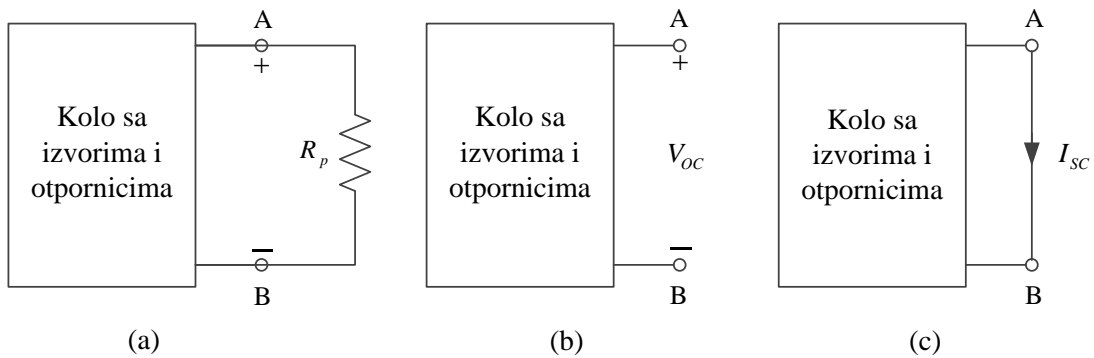
Slika 3.16: Transformacija neidealnog kontrolisanog strujnog i naponskog izvora

Transformacije izvora mogu imati značajnu primenu u uprošćavanju električnih kola, kada je potrebno smanjiti broj čvorova ili smanjiti broj petlji u kolu. Generalizacija transformacije izvora formulisana je kroz dve teoreme obrađene u sledećem poglavlju.

3.10 Tevenenova i Nortonova teorema

Pretpostavimo da imamo neko električno kolo i da želimo da odredimo struju, napon ili snagu na nekom otporniku, koji ćemo nazvati *potrošač* i obeležiti sa R_p . Ova situacija je ilustrovana na slici 3.17a. Tevenenova i Nortonova teorema pokazuju kako se celo kolo, osim potrošača, može zameniti ekvivalentnim realnim naponskim ili strujnim izvorom, tako da struja i napon potrošača ostanu nepromenjeni.

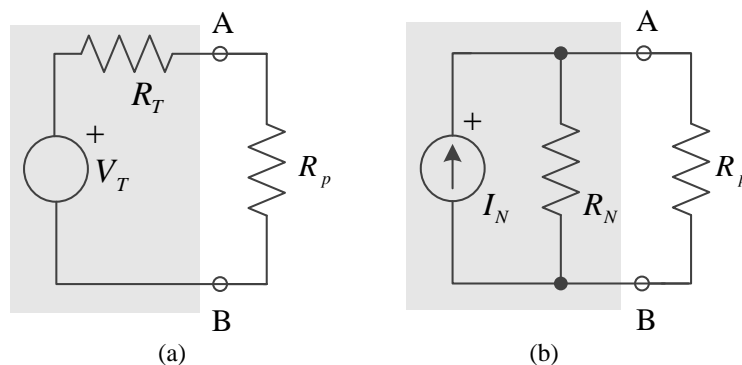
Posmatrajmo kolo na sl. 3.17a. Ako se potrošač isključi iz kola, pristupni krajevi ostaju otvoreni, i na njima postoji napon, koji ćemo nazvati napon otvorene veze i obeležiti sa V_{oc} , kao na slici 3.17b. Međutim, ako se posle isključenja potrošača pristupni krajevi kratko spoje, onda između njih postoji struja kratkog spoja, koju ćemo obeležiti sa I_{sc} , kao na slici 3.17c.



Slika 3.17: Određivanje napona otvorenih krajeva i struje kratkog spoja.

Kao ilustraciju *Tevenenove teoreme* posmatrajmo kolo na sl. 3.18a, u kome je kompletno kolo sa izvorima i otpornicima (bez potrošača) zamenjeno ekvivalentnim naponskim izvorom V_T i serijski vezanim otpornikom R_T . Poređenjem kola sa slike 3.17 i slike 3.18a, lako se vidi da su struja kroz potrošač i napon na potrošaču isti ako je:

$$V_T = V_{oc}, \quad R_T = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} \quad (1.27)$$



Slika 3.18: Tevenenovo i Nortonovo ekvivalentno kolo.

Ove relacije i jednačine 3.27 predstavljaju Tevenenovu teoremu koja glasi:

Svako električno kolo sa zavisnim i nezavisnim izvorima i otpornicima se može zameniti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog naponskog izvora V_T , čiji je napon jednak naponu kola sa isključenim potrošačem V_{OC} , i serijskog otpornika R_T , čija je otpornost jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem V_{OC} i struje kroz kratkospojeni potrošač I_{SC} .

Kao ilustraciju *Nortonove teoreme* posmatrajmo kolo na sl. 3.18b, u kome je kompletno kolo sa izvorima i otpornicima (bez potrošača) zamenjeno ekvivalentnim strujnim izvorom I_N i paralelno vezanim otpornikom R_N . Poređenjem kola sa slike 3.17 i slike 3.18b, lako se vidi da su struja kroz potrošač i napon na potrošaču isti ako je:

$$I_N = I_{SC}, \quad R_N = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} \quad (1.28)$$

Ove relacije predstavljaju Nortonovu teoremu koja glasi:

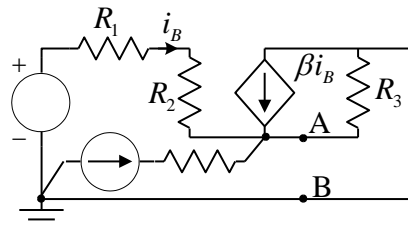
Svako električno kolo sa zavisnim i nezavisnim izvorima i otpornicima se može zameniti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog strujnog izvora I_N , čija je struja jednaka struji kroz kratkospojeni potrošač I_{SC} , i paralelnog otpornika R_N , čija je otpornost jednaka količniku naponu kola sa isključenim potrošačem V_{OC} i struje kroz kratkospojeni potrošač I_{SC} .

Izračunavanje ekvivalentne otpornosti R_T ili R_N se može uraditi korišćenjem *test generatora*.

Ako se umesto potrošača na krajeve A i B priključi se naponski generator V_T , nezavisni izvori u kolu se anuliraju kratkospajanjem nezavisnih naponskih izvora i raskidanjem nezavisnih strujnih izvora, a zatim odredi struja kroz test generator I_T , dobija se ekvivalentna otpornost kao $R_T = V_T / I_T$. Isti postupak se može sprovesti i priključivanjem strujnog test generatora, I_T , i određivanjem napona na njemu, V_T . Odluka o tome koji postupak treba primeniti zavisi od toga kolika uprošćenja donosi jedan ili drugi način.

Primer 3.5

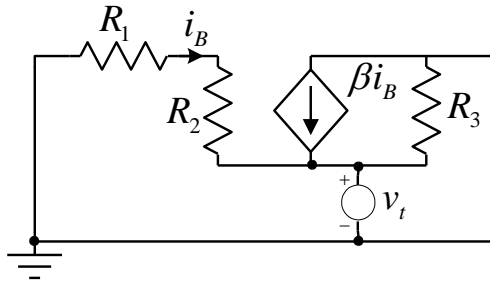
Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B u kolu sa kontrolisanim generatorom koje je prikazano na slici 3.19.



Slika 3.19: Kolo sa kontrolisanim generatorom

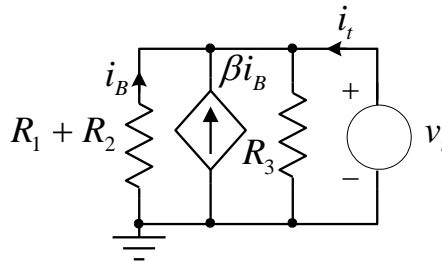
Rešenje:

Prvi korak u rešavanju je anuliranje nezavisnih generatora, strujni se zamenjuje otvorenom vezom a naponski kratkim spojem. Potom se između tačaka za koje se računa otpornost postavi test generator. Ovim izmenama se dobija kolo koje je prikazano na slici 3.20.



Slika 3.20 Uprošćeno kolo sa kontrolisanim generatorom

Potrebno je izračunati struju test generatora u zavisnosti od testnog napona, količnik napona i struje jednak je traženoj ekvivalentnoj otpornosti. Kolo se dalje može pojednostaviti kao što je prikazano na slici 3.21.



Slika 3.21. Ekvivalentna šema

Struja test generatora jednaka je zbiru struja u ostale tri grane kola:

$$i_t = v_t / R - (1 + \beta)i_B$$

Dalje je potrebno izraziti struju i_B preko napona v_t :

$$i_B = -v_t / (R_1 + R_2)$$

Zamenom u prethodnu jednačinu dobija se zavisnost struje test generatora od napona test generatora:

$$i_t = v_t / R_3 + v_t(1 + \beta) / (R_1 + R_2) = v_t / R_{AB}.$$

Deljenjem obe strane jednakosti sa v_t dobija se jednakost u kojoj figuriše tražena ekvivalentna otpornost:

$$1 / R_{AB} = 1 / R_3 + (1 + \beta) / (R_1 + R_2).$$

Konačno važi:

$$R_{AB} = R_3 \parallel \frac{R_1 + R_2}{1 + \beta}.$$

4. Kalem i kondenzator u kolima sa promenljivim strujama

U elektronskim kolima se često dešava da se struktura kola menja istovremenim otvaranjem ili zatvaranjem jednog ili više prekidača, što je na primer ekvivalentno promeni stanja provodnosti diode u kolu. Posle takve promene nastaje promena napona i struja u kolu koja se odvija po određenim zakonitostima, a koje ćemo proučavati u ovom poglavlju. Takva analiza kola se naziva *analiza prelaznog režima*.

U odvijanju prelaznih pojava ključnu ulogu imaju dva pasivna elementa koje smo već pomenuli: kondenzator i kalem. Oba ova elementa imaju neke zajedničke osobine. Oni su linearni elementi jer je kod njih relacija između struje i napona predstavljena linearnim diferencijalnim jednačinama. Takođe, oba elementa imaju sposobnost akumulacije energije. Kod kondenzatora energija se akumulira u električnom polju, a kod kalema u magnetskom polju. Akumulirana energija se može predati ostatku kola. Zbog ove osobine akumulacije energije, kondenzator i kalem se nazivaju i *reaktivni elementi*.

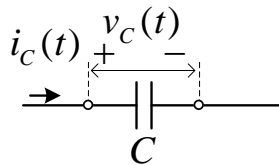
4.1 Kondenzator

Kondenzator se sastoji od dve provodne površine razdvojene izolacionim materijalom (*dielektrikom*). Opterećenje kondenzatora, čiji je simbol zajedno sa referentnim smerovima za napon i struju prikazan na slici 4.1, srazmerno je naponu na kondenzatoru:

$$Q = CV \quad (4.1)$$

Konstanta C u prethodnom izrazu naziva se *kapacitivnost (kapacitet)* kondenzatora.

Ako se napon na kondenzatoru ne menja, pošto su elektrode kondenzatora izolovane dielektrikom, nema stalne struje kroz kondenzator. Dakle, *pri konstantnoj pobudi kondenzator se ponaša kao otvorena veza*.



Slika 4.1: Simbol kondenzatora i referentni smerovi za struju i napon.

Međutim, ako se napon na kondenzatoru menja sa vremenom, menjaće se i njegovo električno opterećenje:

$$q(t) = Cv(t) \quad (4.2)$$

Diferenciranjem ove jednačine po vremenu se dobija:

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (4.3)$$

Dakle, ako se napon na kondenzatoru menja, opterećenje na kondenzatoru se takođe menja, *što znači da postoji struja kroz kondenzator*.

Iz poslednje jednačine se takođe vidi da *nije moguće naglo promeniti napon na kondenzatoru* jer bi to zahtevalo beskonačno veliku struju kroz njega.

Integracijom jednačine (4.3) se dobija:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(x) dx + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx \quad (4.4)$$

gde se $v(t_0)$ naziva *početni napon na kondenzatoru*.

Energija akumulirana u električnom polju kondenzatora se može odrediti iz snage koja se predaje kondenzatoru:

$$w_c(t) = \int_{-\infty}^t p_c(x) dx = \int_{-\infty}^t v(x) C \frac{dv(x)}{dx} dx = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad (4.5)$$

Kapacitet kondenzatora u praksi kreće se od pikofarada ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$) do farada. Realni kondenzatori nemaju idealni dielektrik, tako da postoji slaba provodnost između dve ploče. Neidealni dielektrik se modeluje vezivanjem otpornika velike otpornosti paralelno kondenzatoru.

Slično otpornicima, i kondenzatori se mogu vezivati paralelno ili serijski. Koristeći I Kirhofov zakon, lako se može pokazati da *ekvivalentna kapacitivnost paralelne veze kondenzatora predstavlja zbir kapacitivnosti paralelno vezanih kondenzatora*:

$$C_p = C_1 + C_2 + \dots + C_N \quad (4.6)$$

Korišćenjem II Kirhofovog zakona, lako se dobija da recipročna vrednost ekvivalentne kapacitivnosti serijske veze kondenzatora predstavlja zbir recipročnih vrednosti kapacitivnosti serijski vezanih kondenzatora:

$$\frac{1}{C_p} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad (4.7)$$

4.2 Kalem

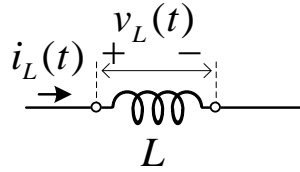
Kalem se sastoji od provodne žice koja je namotana oko jezgra od nemagnetnog ili magnetnog materijala. Simbol kalema, zajedno sa referentnim smerovima za napon i struju prikazan je na slici 4.2.

Relacija između napona i struje kalema data je diferencijalnom jednačinom:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.8)$$

Konstanta L u prethodnom izrazu naziva se *induktivnost* kalema.

Ako je struja kroz kalem konstantna, njen prvi izvod je nula, pa je napon na kalemu takođe nula. Dakle, *u stalnom jednosmernom režimu kalem se ponaša kao kratak spoj*.



Slika 4.2: Simbol kalem i referentni smerovi za struju i napon.

Postupajući na sličan način kao kod kondenzatora, integracijom jednačine (4.8) se dobija:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(x) dx = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx \quad (4.9)$$

gde je $i(t_0)$ početna struja kroz kalem.

Energija akumulirana u magnetskom polju kalem može se odrediti iz snage koja se predaje kalem:

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t p_L(x) dx = \int_{-\infty}^t L \frac{di(x)}{dx} i(x) dx = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (4.10)$$

Induktivnost kalemova u praksi se kreće od μH do nekoliko H. Realni kalemovi imaju malu, ali konačnu otpornost žice, tako da disipiraju energiju. Neidealni kalem se modeluje vezivanjem otpornika male otpornosti na red sa kalemom.

Kalemovi se mogu povezivati paralelno ili serijski. U slučaju paralelne veza kalemova, iz I Kirhofovog zakona sledi da recipročna vrednost ekvivalentne induktivnosti paralelne veze kalemova predstavlja zbir recipročnih vrednosti induktivnosti paralelno vezanih kalemova:

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (4.11)$$

Korišćenjem II Kirhofovog zakona, dobija se da ekvivalentna induktivnost serijske veze kalemova predstavlja zbir vrednosti induktivnosti serijski vezanih kalemova:

$$L_s = L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad (4.12)$$

4.3 Kola prvog reda sa kondenzatorima i kalemovima

Kola prvog reda sadrže izvore, otpornike i jedan kondenzator (*RC kola*) ili jedan kalem (*RL kola*) i najjednostavniji primer takvih kola prikazan je na slici 4.3.

Da bi posmatrali prelazni režim kod kola prvog reda, smatraćemo da se prekidač, koji je bio otvoren, zatvara u trenutku $t = 0$, čime se pobudni izvor vezuje u kolo. Ponašanje RC kola za $t > 0$ određeno je drugim Kirhofovom zakonom, koji za kolo sa slike 4.3a glasi:

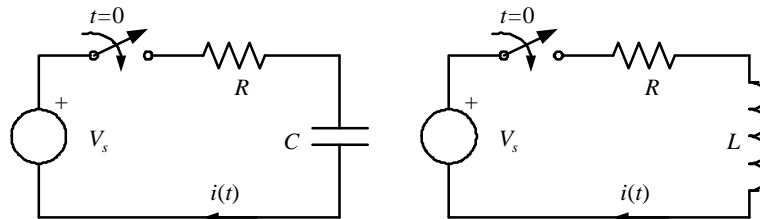
$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx + Ri(t) = V_s \quad (4.13)$$

čijim se diferenciranjem po vremenu dobija:

$$\frac{i(t)}{C} + R \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad (4.14)$$

ili, posle sređivanja,

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = 0 \quad (4.15)$$



Slika 4.3: Kola prvog reda: RC kolo i RL kolo.

Ponašanje RL kola za $t > 0$ određeno je drugim Kirhofovim zakonom, koji za kolo sa slike 4.3a glasi:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_s \quad (4.16)$$

ili, posle sređivanja,

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{V_s}{L} \quad (4.17)$$

Poređenjem diferencijalnih jednačina za RC kolo (4.15) i RL kolo (4.17), vidi se da se oba kola mogu opisati diferencijalnom jednačinom oblika:

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t) \quad (4.18)$$

Iz matematike je poznato da se rešenje diferencijalne jednačine (4.18) može uvek predstaviti u obliku:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \quad (4.19)$$

gde je $x_p(t)$ *prinudno rešenje*, koje predstavlja ma koje rešenje diferencijalne jednačine:

$$\frac{dx_p(t)}{dt} + ax_p(t) = f(t) \quad (4.20)$$

dok je $x_c(t)$ *prirodno rešenje*, koje predstavlja rešenje homogene diferencijalne jednačine:

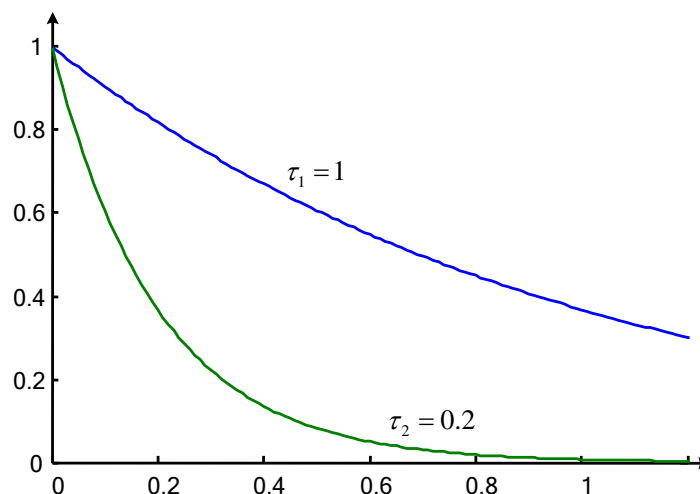
$$\frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) = 0 \quad (4.21)$$

Iz jednačine koja daje prirodno rešenje (4.20) se vidi da rešenje $x_c(t)$ i njegov izvod $dx_c(t)/dt$ moraju imati isti vremenski oblik, jer se inače ne bi mogli poništiti. Jedan mogući oblik za $x_c(t)$ je eksponencijalna funkcija $x_c(t) = Ke^{-at}$. Što se prinudnog rešenja $x_p(t)$ tiče, ono se mora sastojati od funkcije $f(t)$ i njenog prvog izvoda $df(t)/dt$. Izuzetak od ovog pravila predstavlja slučaj $f(t) = Ae^{-at}$, gde je a ista konstanta kao u diferencijalnoj jednačini.

U slučaju posmatranih RC i RL kola, $f(t) = A = \text{const}$, pa je prinudno rešenje diferencijalne jednačine takođe konstanta $x_p(t) = K_1$. Prirodno rešenje je, kao što je već rečeno, eksponencijalnog oblika $x_c(t) = K_2e^{-at}$. Kompletno rešenje diferencijalne jednačine je onda:

$$x(t) = K_1 + K_2e^{-at} = K_1 + K_2e^{-t/\tau} \quad (4.22)$$

Konstanta $\tau = 1/a$ naziva se *vremenska konstanta kola*. Za RC kolo, $\tau = RC$, dok je za RL kolo $\tau = L/R$. Vremenska konstanta kola određuje brzinu kojom se odvijaju promene napona ili struja u kolu. Lako je pokazati da se za vreme $t = \tau$ posmatrana veličina $x(t)$ promeni za 63.2% od ukupne moguće promene, dok se za vreme $t = 5\tau$ ista veličina promeni za 99.3%. Dakle, *posle pet vremenskih konstanti prelazni proces je praktično završen*. Ova analiza pokazuje da velika vremenska konstanta znači sporo odvijanje promena veličina u kolu, a da mala vremenska konstanta znači brzo odvijanje promena veličina u kolu. Za ilustraciju ove činjenice, na slici 4.4 su prikazani oblici rešenja (4.22) dobijeni za dve vrednosti vremenske konstante $\tau_1 = 1$ i $\tau_2 = 0.2$, dok su ostali parametri isti: $K_1 = 0$ i $K_2 = 1$.



Slika 4.4: Zavisnost brzine promene odziva od vremenske konstante.

Primitimo da drugi član u rešenju (4.22) teži ka nuli kada $t \rightarrow \infty$. Dakle:

$$K_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty) \quad (4.23)$$

Konstanta K_1 se naziva *ravnotežno rešenje*.

Takođe se, iz uslova:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = x(0^+) = K_1 + K_2 = x(\infty) + K_2 \quad (4.24)$$

dobija:

$$K_2 = x(0^+) - x(\infty) \quad (4.25)$$

tako da se konačno rešenje (4.22) može napisati i u obliku:

$$x(t) = x(\infty) + (x(0^+) - x(\infty))e^{-t/\tau} \quad (4.26)$$

koji može korisno poslužiti za direktno pisanje jednačine za bilo koji promenljivi napon ili struju, ako su poznate veličine $x(0^+)$, $x(\infty)$ i τ .

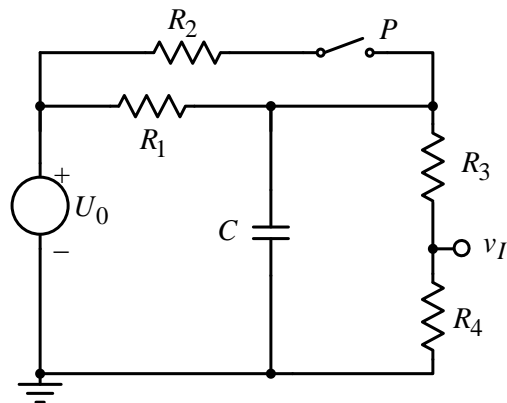
Rezime analize kola prvog reda kada je pobuda nastala promenom stanja prekidača:

1. Analizira se kolo neposredno pre promene stanja prekidača u trenutku $t = 0^-$, da bi se odredio napon na kondenzatoru $v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+)$ ili struja kabela $i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+)$
2. Početni uslov $x(0^+)$ se dobija rešavanjem jednosmernog kola u kome je kondenzator zamenjen generatorom jednosmernog napona ekvivalentan njegovoj akumuliranoj energiji u trenutku $t = 0$, dok je kalem zamenjen generatorom jednosmerne struje ekvivalentne njegovoj akumuliranoj energiji u trenutku $t = 0$.
3. Finalni uslov $x(\infty)$ se dobija kada se reši jednosmerno kolo nakon promene stanja prekidača koje bi potencijalno postojalo u ravnotežnom stanju. Pri tome je kondenzator otvorena veza, a kalem kratak spoj.
4. Vremenska konstanta τ dobija se kao $\tau = RC$, ili $\tau = L/R$ gde je R ekvivalentna otpornost koju vide kondenzator ili kalem.
5. Analiza važi za bilo koju promenljivu veličinu u kolu, struju, napon ili potencijal.

Rezultati koji su izvedeni u ovom poglavlju su generalni mogu se uspešno primeniti i na složenija kola. U nekim slučajevima primenom Tevenenove ili Nortonove teoreme, deo kola sa otpornicima i izvorima se može predstaviti ekvivalentnim izvorom i otpornikom, a više kondenzatora ili kalemova se mogu ekvivalentirati jednim kondenzatorom ili kalemom ukoliko su vezani paralelno ili serijski. U takvim slučajevima naponi i struje kondenzatora ili kalemova dobijaju se kao rešenje prostog RC ili RL kola.

Primer 4.1

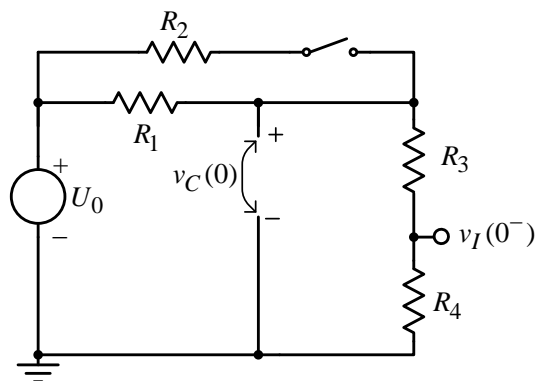
Za kolo sa Slike 4.4, trenutku $t = 0$ zatvori se prekidač P . Odrediti vremensku zavisnost izlaznog napona $v_I(t)$.



Slika 4.4. Slika uz primer 4.1

Rešenje:

Dato kolo je pre promene stanja prekidača bilo u ravnotežnom stanju, što znači da je neposredno pre zatvaranja prekidača bilo u jednosmernom režimu. Tada je kondenzator otvorena veza i da bi se dobili naponi i struje za $t < 0$ rešava se kolo sa slike 4.5



Slika 4.5. Određivanje stanja pre zatvaranja prekidača

Tada ce napon na kondenzatoru dobija kao pad napona na rednoj vezi otpornika R_4 i R_3 :

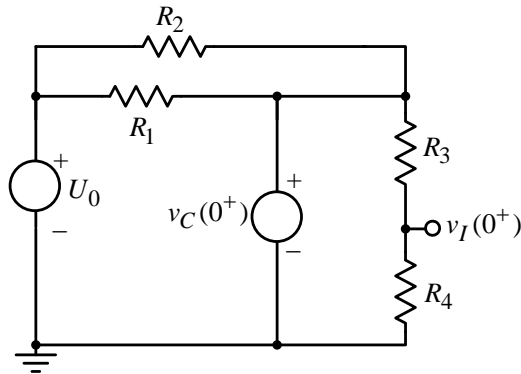
$$v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+) = \frac{R_3 + R_4}{R_3 + R_4 + R_1} U_0,$$

dok je vrednost napona na izlazu jednaka

$$v_I(0^-) = \frac{R_4}{R_3 + R_4 + R_1} U_0$$

Početni uslov $x(0^+)$ je napon na izlazu $v_I(0^+)$ neposredno nakon promene stanja prekidača (u trenutku $t = 0^+$) i dobija se na osnovu kola sa slike 4.6. u kome je akumulisana

energija kondenzatora predstavljena kao ekvivalentni naponski generator vrednosti $v_C(0)$. Napon $v_I(0^+)$ se dobija kao pad napona na otporniku R_4 :



Slika 4.6. Određivanje početnog uslova

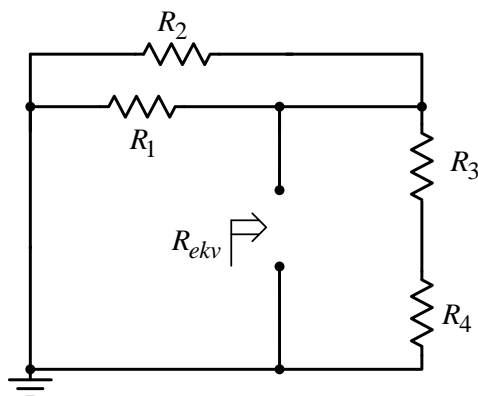
$$v_I(0^+) = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_C(0^+) = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \frac{R_3 + R_4}{R_3 + R_4 + R_1} U_0 = \frac{R_4}{R_3 + R_4 + R_1} U_0$$

U ovom slučaju $x(0^+) = x(0^-)$ što generalno ne važi. Ekvivalentna otpornost koju vidi kondenzator nakon promene stanja prekidača računa se prema kolu sa slike 4.7. Pri tome je nezavisni naponski generator u kolu eliminisan kratkim spajanjem:

$$R_{ekv} = ((R_3 + R_4) \parallel R_1 \parallel R_2),$$

Odakle se dobija vremenska konstanta

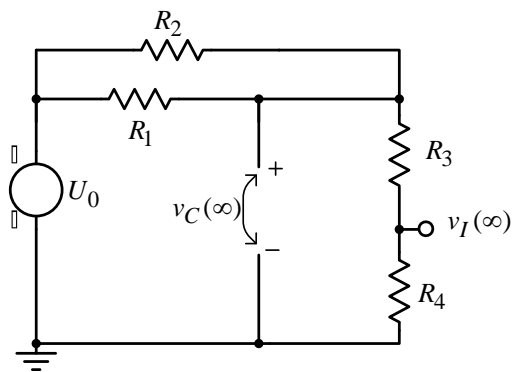
$$\tau = CR_{ekv} = C \cdot ((R_3 + R_4) \parallel R_1 \parallel R_2).$$



Slika P 4.7. Određivanje vremenske konstante

Finalna vrednost izlaznog napona dobija se rešavanjem jednosmernog kola sa slike P 4.8. i ona iznosi:

$$v_I(\infty) = \frac{R_4}{R_3 + R_4 + R_2 \parallel R_1} U_0$$

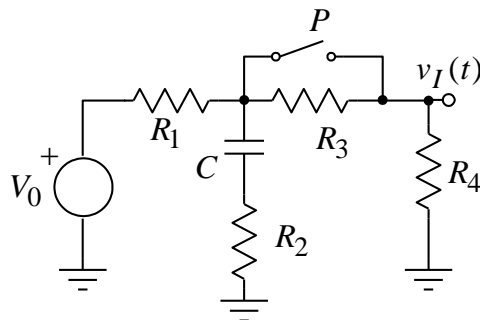


Slika 4.8. Računanje krajnjeg uslova

Kada su određeni parametri $v_I(0^+)$, $v_I(\infty)$ i τ , primenom jednačine 4.26 dobija se željeni odziv.

Primer 4.2:

U kolu sa slike 4.9. deluje generator jednosmernog napona V_0 . Ako se u trenutku $t = 0$ zatvori prekidač P , odrediti i nacrtati napon izlazni napon $v_I(t)$. Vrednosti komponenti u kolu su $C = 22\text{nF}$, $V_0 = 5\text{V}$, $R_1 = R_2 = 4.7\text{k}\Omega$, $R_3 = R_4 = 800\Omega$.



Slika 4.9. Kolo uz primer 4.2

Rešenje:

Pre zatvaranja prekidača, za $t < 0$, kolo se nalazi u stacionarnom stanju. Naponi na izlazu kola i na kondenzatoru se dobijaju rešavanjem jednosmernog kola koje se dobija eliminacijom kondenzatora, slika 4.10. a).

$$v_I(0^-) = V_0 \frac{R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = 0.635\text{V},$$

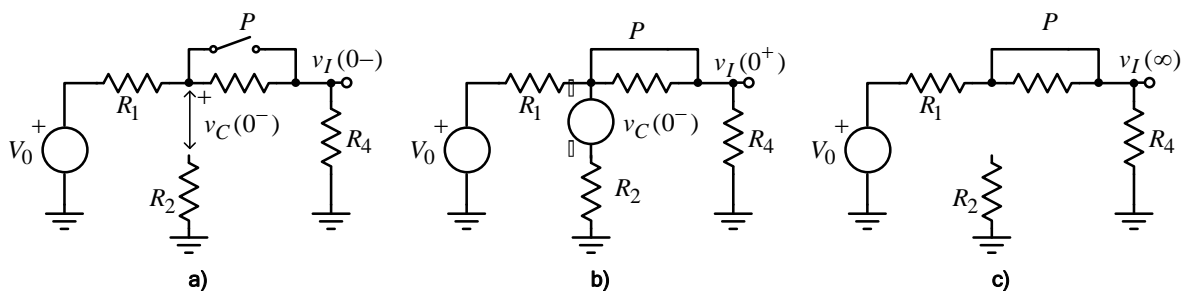
$$v_C(0^-) = V_0 \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = 1.27\text{V}.$$

Nakon zatvaranja prekidača, na osnovu ekvivalentnog kola sa slike 4.10. b) računa se početna vrednost izlaznog napona. Radi lakšeg računanja, otpornici R_1 i R_2 , i naponi V_0 i $v_C(0^-)$, ekvivalentiraju se Tevenenovim generatorom:

$$V_T = \frac{V_0 R_2 + v_C(0^-) R_1}{R_1 + R_2} = 3.14 \text{V}, \quad R_T = R_1 \parallel R_2 = 2.35 \text{k}\Omega,$$

$$v_I(0^+) = \frac{R_4}{R_T + R_4} V_T = 0.796 \text{V}.$$

Krajnja vrednost napona se dobija rešavanjem kola sa slike 4.10. c).



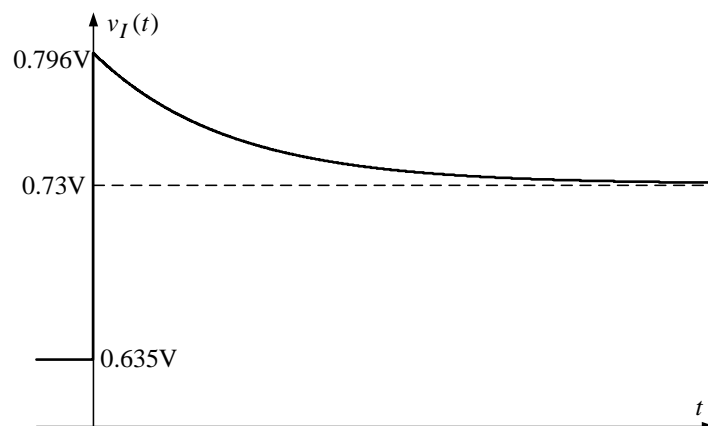
Slika 4.10.

$$v_I(\infty) = \frac{R_4}{R_4 + R_1} V_0 = 0.73 \text{V},$$

dok vremenska konstanta iznosi:

$$\tau = C \cdot (R_2 + R_1 \parallel R_4) = 118 \mu\text{s}$$

Primenom jednačine 4.26 dobija se vremenska zavisnost napona $v_I(t)$. Kada su određeni parametri $v_I(0^+)$, $v_I(\infty)$ i τ , primenom jednačine 4.26 dobija se željeni odziv za $t > 0$. Na slici 4.11. prikazan je vremenski dijagram napona $v_I(t)$.



Slika 4.11: vremenski dijagram napona $v_I(t)$.

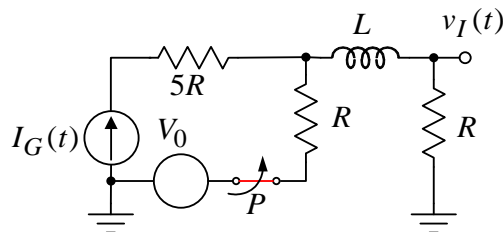
U ovom slučaju nije ispunjeno da je $x(0^+) = x(0^-)$.

Primer 4.3.

Kolo sa slike je 4.12. je pobuđeno strujnim generatorom gde je njegova struja definisana izrazom

$$i_G(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ I_0, & t > 0 \end{cases}$$

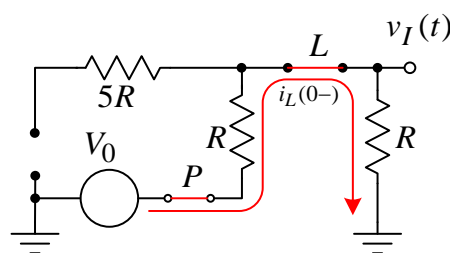
pri čemu je $I_0 = 8\text{mA}$. Ako je se u trenutku $t = 0$ otvori prekidač P odrediti i nacrtati izlazni napon $v_I(t)$. Poznato je: $R = 1\text{k}\Omega$, $L = 10\text{mH}$, $V_0 = 20\text{V}$.



Slika 4.12: Kolo uz primer 4.3

Rešenje:

Kolo je do trenutka otvaranja prekidača bilo u jednosmernom režimu u kome je delovao naponski generator, a strujni generator nije delovao. Struja kalema, neposredno pre zatvaranja prekidača, dobija se rešavanjem jednosmernog kola sa slike 4.13. u kome se kalem ponaša kao kratak spoj:



Slika 4.13

$$i_L(0^-) = \frac{V_0}{2R} = \frac{20\text{V}}{2\text{k}\Omega} = 10\text{mA}.$$

Početna vrednost izlaznog napona $v_I(0^+)$ za $t = 0^+$ se dobija rešavanjem jednosmernog kola u kome je kalem zamenjen jednosmernim strujnim izvorom, naponski generator je uklonjen iz kola jer je prekidač otvoren, a strujni generator deluje u kolu, slika 4.14 a):

$$v_I(0^+) = R \cdot i_L(0^-) = 10V$$

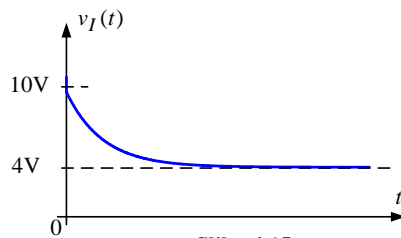
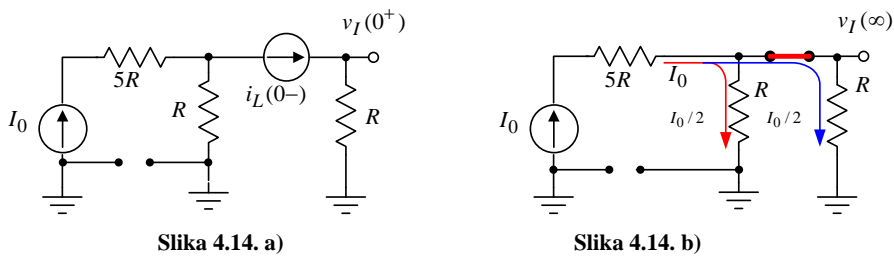
Krajnja vrednost napona na izlazu se dobija rešavanjem jednosmernog kola u kome je kalem zamenjen kratkim spojem, slika 4.14b. Pošto se struja strujnog izvora deli na dva jednaka dela važi da je

$$v_I(\infty) = R \cdot I_0 / 2 = 4V$$

Vremenska konstanta se dobija kao $\tau = L / R_{ekv} = L / 2R = 5\mu s$, gde je R_{ekv} ekvivalentna otpornost koju vidi kalem. Vremenska zavisnost izlaznog napona je data sa:

$$v_I(t) = 4V + 6V \cdot e^{-t/\tau}$$

dok je vremenski dijagram izlaznog napona prikazan na slici 4.15.



Slika 4.15.

4.4 Kola drugog reda sa kondenzatorima i kalemovima

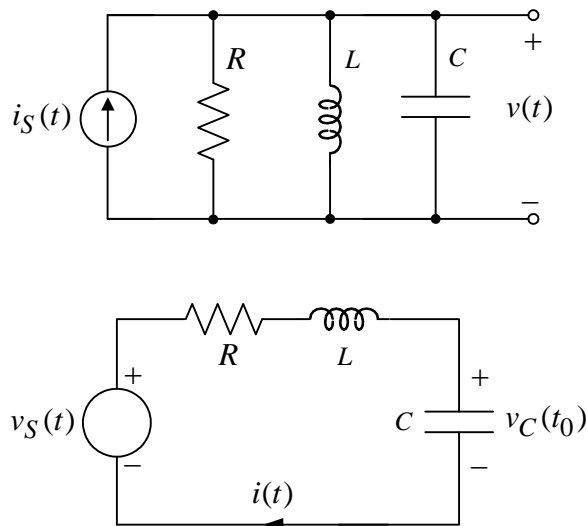
Nešto složeniji slučaj za analizu nastaje kada su kondenzator i kalem istovremeno prisutni u kolu. Tada se dobijaju električna kola sačinjena od izvora, otpornika, kondenzatora i kalema (*RLC kola*), koja su predstavljena na slici 4.16.

Ako postoji početna energija u kalemu i kondenzatoru, onda se za prvo RLC kolo može napisati jednačina po I Kirhofovom zakonu:

$$\frac{v(t)}{R} + i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx + C \frac{dv(t)}{dt} = i_s(t) \quad (4.27)$$

dok se za drugo RLC kolo može napisati jednačina po II Kirhofovom zakonu:

$$Ri(t) + v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx + L \frac{di(t)}{dt} = v_s(t) \quad (4.28)$$



Slika 4.16: Kola drugog reda (RLC kola), paralelno i redno

Ako se obe jednačine diferenciraju po vremenu, a zatim prva podeli sa C a druga sa L , onda se dobija:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{C} \frac{di_s(t)}{dt} \quad (4.29)$$

odnosno,

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (4.30)$$

Dakle, oba kola se mogu opisati diferencijalnom jednačinom drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2x(t) = f(t) \quad (4.31)$$

čije je rešenje:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \quad (4.32)$$

gde je $x_p(t)$ prinudno rešenje, a $x_c(t)$ prirodno rešenje.

Ako je pobudna funkcija konstanta, $f(t) = A$, kao na slici 4.5, onda je prinudno rešenje $x_p(t)$ rešenje jednačine:

$$\frac{d^2x_p(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_p(t)}{dt} + a_2x_p(t) = A \quad (4.33)$$

Iz činjenice da prinudno rešenje mora biti sačinjeno od funkcije $f(t) = A$ i njenog prvog izvoda $df(t)/dt = 0$ sledi:

$$x_p(t) = A/a_2 \quad (4.34)$$

Homogena jednačina iz koje se dobija prirodno rešenje se može napisati i u obliku:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2x(t) = 0 \quad (4.35)$$

Smenom $x(t) = Ke^{st} \neq 0$, ova jednačina postaje algebarska jednačina:

$$s^2Ke^{st} + 2\alpha sKe^{st} + \omega_0^2Ke^{st} = 0 \quad (4.36)$$

ili

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \quad (4.37)$$

Ova jednačina se naziva *karakteristična jednačina*, koeficijent α se naziva *koeficijent prigušenja*, a dok se ω_0 naziva *rezonantna učestanost*. Rešenja ove kvadratne jednačine su:

$$s_1, s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (4.38)$$

i nazivaju se *prirodne (sopstvene) učestanosti*. Rešenja homogene diferencijalne jednačine (4.35) su:

$$x_1(t) = K_1e^{s_1t}, \quad x_2(t) = K_2e^{s_2t} \quad (4.39)$$

a njihov zbir takođe predstavlja prirodno rešenje:

$$x_c(t) = K_1e^{s_1t} + K_2e^{s_2t} \quad (4.40)$$

Konstante K_1 i K_2 se određuju iz početnih uslova $x(0)$ i $dx(0)/dt$.

Zavisno od vrednosti parametara α i ω_0 , razlikuju se tri slučaja:

1. $\alpha > \omega_0$ - *prigušeno rešenje*. Rešenja s_1 i s_2 su realna i nejednaka, pa je prirodno rešenje oblika:

$$x_c(t) = K_1 e^{-(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} + K_2 e^{-(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \quad (4.41)$$

i predstavlja zbir dve opadajuće eksponencijalne funkcije. Konstante K_1 i K_2 se određuju iz početnih uslova.

2. $\alpha = \omega_0$ - *kritično prigušeno rešenje*. Rešenja s_1 i s_2 su realna i jednaka, pa je prirodno rešenje oblika:

$$x_c(t) = B_1 e^{-\alpha t} + B_2 t e^{-\alpha t} \quad (4.42)$$

Konstante B_1 i B_2 se određuju iz početnih uslova.

3. $\alpha < \omega_0$ - *neprigušeno rešenje*. Rešenja s_1 i s_2 su konjugovano kompleksna, pa je prirodno rešenje oblika:

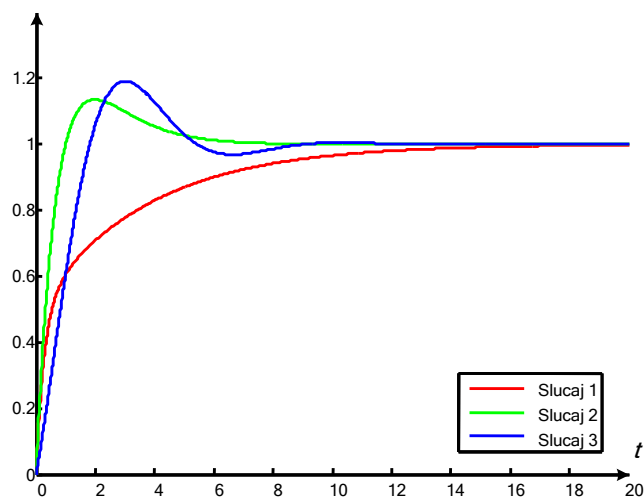
$$x_c(t) = K_1 e^{-(\alpha - j\omega_n)t} + K_2 e^{-(\alpha + j\omega_n)t} = e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) \quad (4.43)$$

gde je:

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (4.44)$$

Dobijeno rešenje ima oscilatorni karakter sa eksponencijalno opadajućom amplitudom oscilacija. Konstante A_1 i A_2 se određuju iz početnih uslova.

Na slici 4.17 prikazani su odzivi kola u sva tri slučaja, za iste početne uslove i istu učestanost $\omega_0 = 1$ i tri vrednosti koeficijenta prigušenja α , $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ i $\alpha = 0.5$. Uočava se da je odziv kola najbrži u slučaju kritičnog prigušenja.



Slika 4.17: Tri slučaja odziva kola drugog reda.

5. Kola sa naizmeničnim strujama

Posebna klasa električnih kola su ona kod kojih su naponi i struje pobudnih izvora periodični signali u vremenu. Pri tome se pod periodičnošću podrazumeva da električna veličina $x(t)$ menja svoje vrednosti u regularnim intervalima. Ukoliko je električno kolo stabilno, nakon uspostavljanja periodične pobude u režimu koji nastaje posle smirivanja prelaznih pojava, naponi i struje elemenata kola će takođe imati periodičan vremenski oblik. U zavisnosti od prirode periodičnog signala razlikujemo:

- prostoperiodične signale koji mogu da se opišu samo kosinusnom ili sinusnom funkcijom, i
- složenoperiodične signale koji mogu da se opišu sumom prostoperiodičnih funkcija.

U elektrotehnici je naročit interes za proučavanje kola pobuđenih prostoperiodičnim naponima i strujama, s obzirom na činjenicu da je naizmenični napon dominantan u snabdevanju električnom energijom u domaćinstvima i industriji. Takođe, pošto se primenom Furijeove analize može pokazati da se bilo kakva periodična funkcija može predstaviti zbirom prostoperiodičnih funkcija, za analizu kola sa složenim periodičnim pobudama može se primeniti princip superpozicije i metode rešavanja kola sa prostoperiodičnim pobudama.

Periodične veličine imaju neke karakteristične osobine i opisuju se sa više kriterijumskih veličina. O ovom poglavlju navešćemo samo elementarne koji su dovoljni za dalja razmatranja.

Za periodičnu veličinu $x(t)$ najmanji mogući interval T za koji je ispunjeno da je

$$x(t) = x(t + n \cdot T) \quad (5.1)$$

naziva se **osnovni** period. Pri tome je $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$. **Osnovna** frekvencija periodične veličine je recipročna vrednost osnovnog perioda $f = 1/T$, jedinica Herc [Hz] dok je osnovna kružna učestanost definisana kao $\omega = 2\pi f$ sa jedinicom radijan u sekundi [rad/s].

Za opisivanje karakteristika periodične funkcije bitni su pojmovi srednje i efektivne vrednosti. Srednja vrednost periodične veličine je definisana kao

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (5.2)$$

pri čemu je očigledno da prostoperiodična veličina srednju vrednost jednaku nuli. Srednja kvadratna vrednost (RMS - *Root Mean Square*) periodične veličine je definisana na sledeći način:

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}. \quad (5.3)$$

Za prostoperiodičnu veličinu

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.4)$$

je poznato da je RMS vrednost jednaka

$$\begin{aligned}
 x_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = X_M \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt} = \\
 &= X_M \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^T \frac{1}{2} dt + \underbrace{\int_0^T \frac{\cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt}_0 \right)} = \frac{X_M}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot X_M
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

U rezistivnim mrežama koje se sastoje samo od termogenih otpornika i kontrolisanih generatora, RMS vrednosti napona i struja su dovoljne da bi se određivale srednje snage u kolu:

$$\begin{aligned}
 \bar{p} &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R \cdot i^2(t) dt = R \cdot \left(\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \right) = R \cdot i_{RMS}^2 \\
 \bar{p} &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v^2(t)}{R} dt = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt \right) = v_{RMS}^2 / R
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

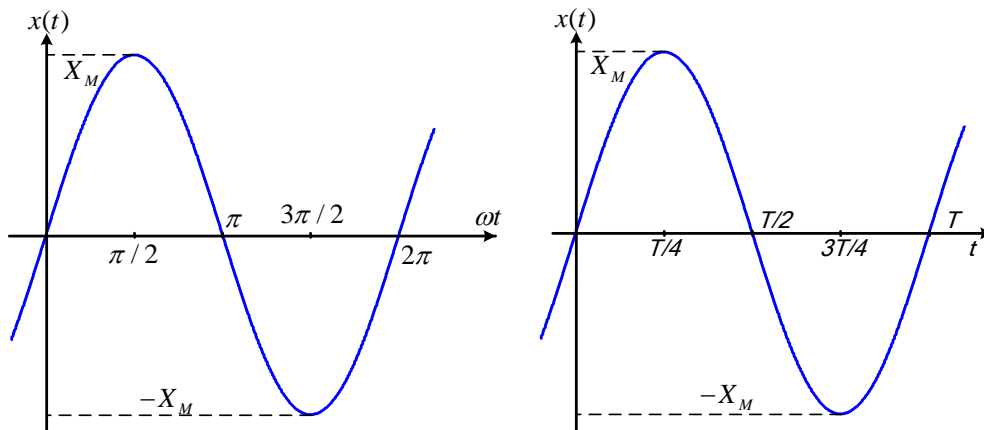
Dakle, za rezistivna kola, pored toga što se rešavaju metodama DC analize, dovoljne su i efektivne vrednosti struja i napona da bi se računale srednje snage. Međutim, za kola koja sadrže i reaktivne komponente kao što su kalem i kondenzator, potreban je složeniji matematički aparat, što će biti razmotreno u sledećim poglavljima.

5.1 Prostoperiodični režim, osnovni pojmovi

Posmatračemo prvo kola kod kojih pobudni izvori predstavljaju *sinusoidalne funkcije vremena*. Analiziraćemo *ustaljeno, stacionarno ili ravnotežno stanje*, koje nastaje posle smirivanja prelaznih procesa u kolu posle primene sinusoidalne pobude, a kada su naponi i struje u kolu takođe sinusoidalni, odnosno *prostoperiodični*. Posmatrajmo sinusnu funkciju:

$$x(t) = X_M \sin \omega t \tag{5.7}$$

koja je prikazana na slici 5.1. X_M se naziva *amplituda* (maksimalna vrednost), ω se naziva *kružna ili ugaona učestanost*, dok je ωt *argument*. Veličina $x(t)$ može predstavljati napon $v(t)$ ili struju $i(t)$.



Slika 5.1: Sinusna funkcija u funkciji argumenta ωt i vremena t .

Ova funkcija je periodična sa periodom od 2π radijana. Period ove funkcije T i učestanost sinusoide f su povezani relacijom:

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.8)$$

Iz uslova periodičnosti:

$$\omega T = 2\pi \quad (5.9)$$

sledi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (5.10)$$

Nešto opštiji oblik sinusoidalne funkcije je:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \theta) \quad (5.11)$$

gde je θ fazni ugao ili početna faza.

Posmatrajmo sad najprostije slučajeve kada su elementarne komponente pobuđene prostoperiodičnom pobudom u vidu napona ili struje. Ukoliko je otpornik R pobuđen strujom

$$i_R(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.12)$$

tada je napon na njemu

$$v_R(t) = R i_R(t) = R I_M \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.13)$$

što znači da je amplituda napona

$$V_M = R I_M \quad (5.14)$$

Ukoliko je kalem L pobuđen strujom

$$i_L(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.15)$$

tada je napon na kalemu jednak

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{di_L}{dt} = -\omega L \cdot I_M \sin(\omega t + \varphi) \\ &= V_M \sin(\omega t + \varphi + \pi) = V_M \cos(\omega t + \varphi + \pi / 2), \end{aligned} \quad (5.16)$$

Što znači da su amplituda napona i fazni pomeraj napona i odnosu na struju

$$V_M = \omega L \text{ i } \Delta\varphi = \pi / 2. \quad (5.17)$$

U slučaju da se kondenzator C pobudi naponom

$$v_C(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.18)$$

dobiće se struja

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = -\omega C \cdot V_M \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_M \cdot \sin(\omega t + \varphi + \pi) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) \quad (5.19)$$

zbog toga je veza amplituda struje i napona kao i fazni pomeraj napona i odnosu na struju dati relacijama

$$V_M = \frac{I_M}{\omega C} \text{ i } -\Delta\varphi = -\pi/2. \quad (5.20)$$

Posmatrajmo sad komponentu koja se sastoji od paralelne veze kalema, kondenzatora i otpornika (paralelno RLC kolo), pobuđenu prostoperiodičnim naponskim generatorom.

- Ukoliko vrednost kapacitvnosti teži nuli a vrednost i induktivnosti teži beskonačnosti, kondenzator i kalem će da se ponašaju kao otvorena veza, tako da će generator videti samo otpornik, pa će napon i struja generatora biti u fazi.
- Ukoliko otpornost i induktivnost teže beskonačnosti generator će videti samo kondenzator pa će postojati fazni pomeraj između napona i struje jednak $-\pi/2$.
- Ukoliko otpornost teži beskonačnosti a kapacitivnost nuli, tada će generator videti samo kalem pa će postojati fazni pomeraj između napona i struje jednak $+\pi/2$.
- Ukoliko se posmatra paralelna veza realnih otpornika, kalemova i kondenzatora, logičan zaključak je da fazni pomeraj može da ima bilo koju vrednost u rasponu od $-\pi/2$ do $\pi/2$.
- Ukoliko se posmatra neka realna uopštena kombinacija više otpornika, kalemova i kondenzatora, i koja je sa dva priključka povezana na pobudni prostoperiodični generator, logičan zaključak je da u opštem slučaju struja i napon generatora nisu u fazi.

U kolima koja su u prostoperiodičnom režimu, pored amplitude, potrebno je voditi računa i o fazama, što zahteva matematički aparat koji nije razvijen u teoriji jednosmernih kola. Naravno, korišćenjem trigonometrijskih identiteta, i rešavanjem diferencijalnih jednačina, moguće je rešavati i kola koja sadrže kalemove i kondenzatore. To ćemo ilustrovati primerima koji slede.

Primer 5.1: Redno RL kolo pobuđeno naponskim sinusoidalnim izvorom

Posmatrajmo jedno RL kolo pobuđeno naponskim sinusoidalnim izvorom. Tada se po II Kirhofovom zakonu može pisati:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t \quad (5.21)$$

Pošto je pobuda sinusoidalna, struja mora biti oblika:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi)$$

Zamenom u prethodnu diferencijalnu jednačinu i rešavanjem po nepoznatima I_M i ϕ , posle dužeg izračunavanja se dobija:

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \phi = -\operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$$

pa je:

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R})$$

Primer 5.2 Snaga koju razvija generator u prostoperiodičnom režimu

U prethodnom izlaganju, zaključili smo da su struja i napon prostoperiodičnog generatora povezanog na neku složenu komponentu prostoperiodične funkcije iste učestanosti, ali ne moraju biti u fazi. Iz tog razloga snaga koju generator razvija na takvom kolu ne može da bude samo prost proizvod amplituda napona i struje. Da bi se odredila snaga koja se razvija, potrebno je poći od trenutne snage i periodične prirode sistema. Neka su dati napon i struja generatora:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \psi), \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta).$$

Tada je trenutna snaga koju razvija generator jednaka

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \theta).$$

Koristeći trigonometrijski identitet $\cos \alpha \cdot \cos \beta = (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) / 2$ dobijamo trenutnu snagu dekomponovanu na jednosmernu i naizmjeničnu komponentu:

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta + \psi) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(\psi - \theta) = Q(t) + P$$

Jednosmerna komponenta te snage je istovremeno i srednja snaga i to je mera energije koju generator kontinuirano predaje potrošaču, i ta komponenta snage se naziva *aktivna snaga*:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\psi - \theta) = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos(\psi - \theta) = VI \cos(\phi) \quad (5.22)$$

Pri tome su V i I RMS vrednosti napona i struje, $\cos(\phi)$ se naziva faktor snage, a jedinica je W (Vat).

Prostoperiodična komponenta trenutne snage $Q(t)$ opisuje energiju koja se u jednoj polovini osnovne periode predaje potrošaču, ali se odmah u sledećoj polovini osnovne periode preuzima nazad od potrošača. Može se pokazati da je vremenski konstantna mera komponente $Q(t)$ veličina koja se naziva *reaktivna snaga*:

$$Q = VI \sin(\phi) \quad (5.23)$$

Jedinica je VAR (Volt – Amper reaktivno)

Očigledno je da je reaktivna snaga nekoristan deo snage i da se u realnim aplikacijama pokušava svesti na najmanju moguću meru, odnosno da odstupanja faktora snage od jedinice treba svesti na najmanju moguću meru.

Proizvod RMS vrednosti napona i struje generatora je veličina koja se naziva prividna snaga, jedinica je VA (Volt – Amper) i ona ima smisla samo ako je unapred poznato da je faktor snage približan jedinici:

$$S = VI. \quad (5.24)$$

Kao što se vidi, do rešenja za vrlo jednostavne probleme došli smo na komplikovan i dugotrajan način. Znatno jednostavniji način rešavanja kola se dobija uspostavljanjem veze između prostoperiodičnih funkcija i kompleksnih brojeva. Ova veza dovodi do algebarskih jednačina po prvom i drugom Kirhofovom zakonu, koje zamenjuju odgovarajuće diferencijalne jednačine, a metode rešavanja su identične metodama koje se koriste kod DC kola, s tom razlikom da se operacije izvode sa kompleksnim brojevima.

5.2 Predstavljanje prostoperiodičnih veličina kompleksnim brojevima

Poći ćemo od Ojlerove predstave kompleksnog broja:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (5.25)$$

čiji su realni i imaginarni deo kosinusna odnosno sinusna funkcija. Pretpostavimo da je pobudna funkcija (fizički neostvarljiva) kompleksni napon:

$$v(t) = V_M e^{j\omega t} = V_M (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (5.26)$$

čiji su realni i imaginarni deo fizički ostvarljivi.

Zbog toga što je kolo linearno, po principu superpozicije, struja u kolu mora se sastojati iz dve komponente:

$$i(t) = I_M [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)] = I_M e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.27)$$

gde je $I_M \cos(\omega t + \phi)$ odziv na funkciju $V_M \cos \omega t$, a $jI_M \sin(\omega t + \phi)$ odziv na funkciju $jV_M \sin \omega t$.

Dakle, umesto da primenimo pobudu $V_M \cos \omega t$ i sprovedemo odgovarajuća izračunavanja, mi možemo da primenimo pobudu $V_M e^{j\omega t}$, odredimo odziv $I_M e^{j(\omega t + \phi)}$ i nađemo njegov realni deo. Mada to na prvi pogled izgleda mnogo komplikovanije nego prvi pristup, u praksi je sve mnogo jednostavnije. U slučaju posmatranog RL kola, zamenom pobude $V_M e^{j\omega t}$ i odziva $I_M e^{j(\omega t + \phi)}$ u diferencijalnu jednačinu 5.21, imamo:

$$L \frac{d}{dt} (I_M e^{j(\omega t + \phi)}) + R I_M e^{j(\omega t + \phi)} = V_M e^{j\omega t} \quad (5.28)$$

odakle se posle diferenciranja dobija:

$$j\omega L I_M e^{j(\omega t + \phi)} + R I_M e^{j(\omega t + \phi)} = V_M e^{j\omega t} \quad (5.29)$$

Deljenjem obe strane jednačine (5.29) sa $e^{j\omega t}$ dobija se:

$$R I_M e^{j\phi} + j\omega L I_M e^{j\phi} = V_M \quad (5.30)$$

što je algebarska jednačina sa kompleksnim koeficijentima, čije je rešenje:

$$I = I_M e^{j\phi} = \frac{V_M}{R + j\omega L} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \arctg(\frac{\omega L}{R})} \quad (5.31)$$

Međutim, pošto je stvarna pobuda $V_M \cos \omega t$ a ne $V_M e^{j\omega t}$, stvarni odziv je realni deo dobijenog rešenja, odnosno:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}) \quad (5.32)$$

što je identično sa rešenjem diferencijalne jednačine 5.21. Dakle, u opštem slučaju imamo:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} [X_M e^{j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re} [(X_M e^{j\phi}) e^{j\omega t}] \quad (5.33)$$

Član $e^{j\omega t}$ je zajednički faktor u definicionoj jednačini za kolo, i može se implicitno podrazumevati u analizi. Preostali parametri, X_M i ϕ kompletno predstavljaju amplitudu i fazni ugao nepoznate struje ili napona. *Kompleksna predstava struje ili napona $X_M e^{j\phi}$ naziva se fazor*. Fazor $X_M e^{j\phi}$ je kompleksni broj u polarnom obliku kod koga X_M predstavlja amplitudu sinusoidalnog signala, a ϕ predstavlja fazni ugao sinusoidalnog signala meren u odnosu na kosinusoidu. U daljem radu, fazore ćemo označavati velikim slovima koja su *podebljana* (bold) ili *podvučena*. Druga varijanta se koristi u primerima jer je pogodnija za vežbanje.

Ako primenimo fazore na analizu prostog RL kola, diferencijalna jednačina 5.21 dobija oblik:

$$L \frac{d}{dt} (\mathbf{I} e^{j\omega t}) + R \mathbf{I} e^{j\omega t} = \mathbf{V} e^{j\omega t} \quad (5.34)$$

gde je $\mathbf{I} = I_M \angle \phi$ i $\mathbf{V} = V_M \angle 0^\circ$. Posle diferenciranja i eliminacije zajedničkog faktora $e^{j\omega t}$ dobija se fazorska jednačina:

$$j\omega \mathbf{L} \mathbf{I} + R \mathbf{I} = \mathbf{V} \quad (5.35)$$

odnosno,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R + j\omega L} = I_M \angle \phi = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (5.36)$$

tako da se opet dobija isto rešenje:

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left[\omega t - \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) \right] \quad (5.37)$$

Analiza kola pomoću fazora predstavlja analizu kola u *frekvencijskom domenu*. U fazorskoj analizi se sistem diferencijalnih jednačina sa prostoperiodičnim pobudnim funkcijama u vremenskom domenu transformišu u sistem algebarskih jednačina sa kompleksnim koeficijentima u frekvencijskom domenu. Takav sistem je neuporedivo lakši za rešavanje. Kada se odrede nepoznati fazori, oni se ponovo transformišu u vremenski domen da bi se dobilo rešenje originalnog sistema diferencijalnih jednačina.

5.3 Opis elemenata kola pomoću fazora

U prethodnom izlaganju definisane su relacije između napona i struje za tri osnovna elementa električnih kola: otpornik, kalem i kondenzator. Sada ćemo te relacije iskazati korišćenjem fazora.

U slučaju otpornika, relacija između struje i napona data je Omovim zakonom:

$$v(t) = Ri(t) \quad (5.38)$$

Ako je napon na otporniku $v(t) = V_M e^{j(\omega t + \theta_v)}$, struja kroz otpornik je $i(t) = I_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$, pa se iz prethodne relacije dobija:

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = R I_M e^{j(\omega t + \theta_i)} \quad (5.39)$$

ili, u fazorskom obliku:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad (5.40)$$

gde je $\mathbf{V} = V_M e^{j\theta_v} = V_M \angle \theta_v$ i $\mathbf{I} = I_M e^{j\theta_i} = I_M \angle \theta_i$. Dakle, $\theta_v = \theta_i$, pa su *kod otpornika struja i napon u fazi*.

U slučaju kalema, relacija između napona i struje je diferencijalna jednačina:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.41)$$

koja se može napisati pomoću fazora u obliku:

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \quad (5.42)$$

Pošto je $j = 1e^{j90^\circ} = 1\angle 90^\circ$, onda je $\theta_v = \theta_i + 90^\circ$, pa kod kalema napon fazno prednjači struji za 90° , ili struja fazno kasni za naponom za 90° .

U slučaju kondenzatora, relacija između struje i napona je diferencijalna jednačina:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (5.43)$$

koja se može napisati pomoću fazora u obliku:

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \quad (5.44)$$

Pošto je $\theta_i = \theta_v + 90^\circ$, kod kondenzatora struja fazno prednjači naponu za 90° , ili napon fazno kasni za strujom za 90° .

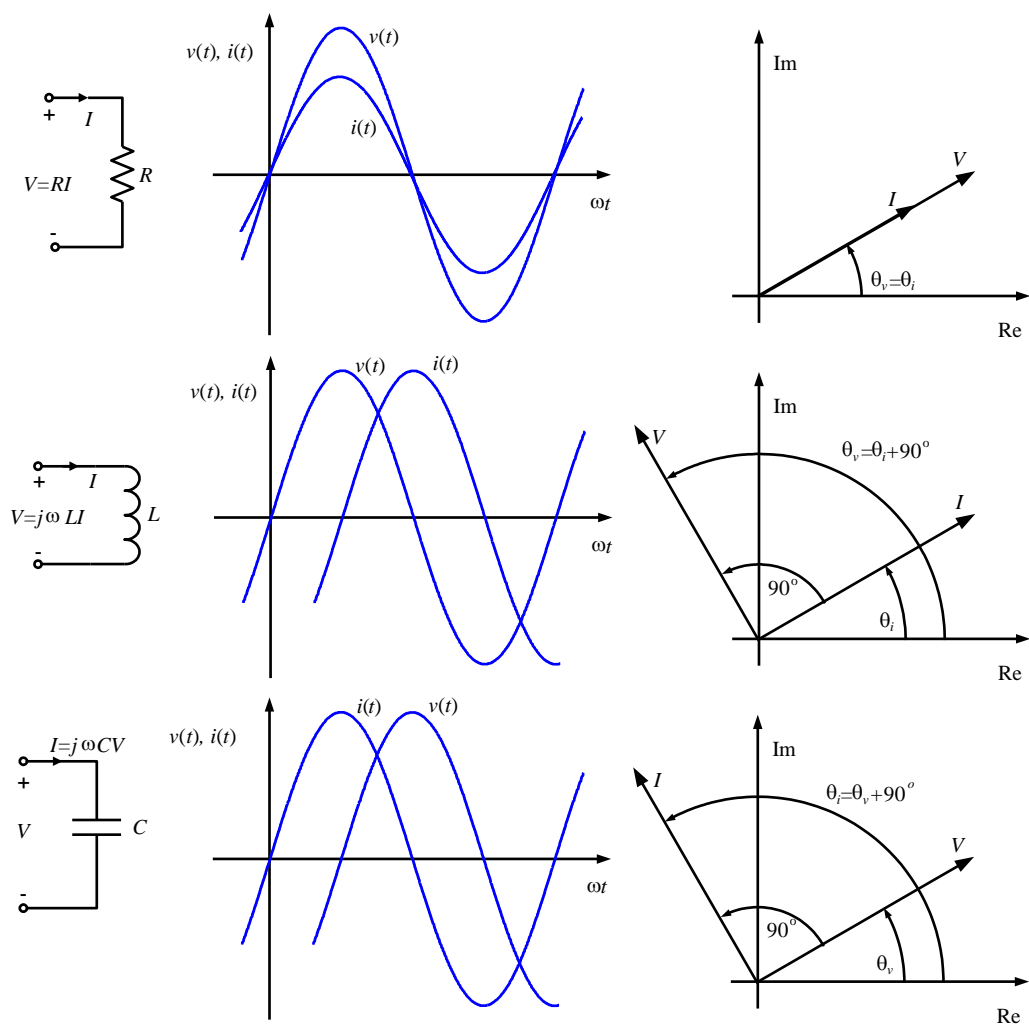
kako fazori predstavljaju kompleksne brojeve, oni se mogu predstaviti i grafički u kompleksnoj ravni. Tako se dobija *fazorski dijagram*. Na osnovu fazorskog dijagrama može se utvrditi odnos amplituda dva fazora, ugao (fazna razlika) između njih, kao i njihov relativni međusobni odnos. Na slici 5.2 su prikazani odnosi između napona i struje u vremenskoj i fazorskoj predstavi za sva tri osnovna pasivna električna elementa.

5.4 Uopšteni Omov zakon: impedansa i admitansa

Kod kola sa jednosmernim strujama otpornost otpornika je Omovim zakonom definisana kao količnik napona na otporniku i struje kroz otpornik. U slučaju kola sa naizmeničnim strujama, kada se koristi fazorska predstava, naponi i struje postaju kompleksne veličine. Ako se formira količnik fazora napona na nekom elementu i fazora struje kroz isti element:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad (5.45)$$

dobija se *uopšteni (generalizovani) Omov zakon*. Kompleksna veličina \mathbf{Z} , koja predstavlja analogiju otpornosti kod jednosmernog režima, naziva se *impedansa*. Jedinica za impedansu je Om (Ω).



Slika 5.2: Fazorski dijagrami za napone i struje kod pasivnih elemenata.

U polarnom koordinatnom sistemu, impedansa se može predstaviti preko svog modula i argumenta kao:

$$\mathbf{Z} = \frac{V_M \angle \theta_v}{I_M \angle \theta_i} = \frac{V_M}{I_M} \angle (\theta_v - \theta_i) = Z \angle \theta_z \quad (5.46)$$

dok se u pravouglom koordinatnom sistemu može predstaviti preko svog realnog i imaginarnog dela:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (5.47)$$

Realni deo impedanse $R(\omega)$ se naziva rezistivna komponenta ili *rezistansa*, dok se imaginarni deo impedanse $X(\omega)$ naziva reaktivna komponenta ili *reaktansa*. Primetimo da *impedansa nije fazor*, iako je frekvencijski zavisna kompleksna veličina. Uslov da neka kompleksna veličina predstavlja fazor je da u vremenskom domenu odgovara nekom sinusoidalnom signalu. Dakle, *pojam impedanse nema nikakvo značenje u vremenskom domenu*.

Poređenjem dve prethodne jednačine (5.46) i (5.47) lako je utvrditi veze između dva oblika predstavljanja impedanse. Tako je:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \theta_z = \arctg \frac{X}{R} \quad (5.48)$$

odnosno,

$$R = Z \cos \theta_z, \quad X = Z \sin \theta_z \quad (5.49)$$

Kod analize kola sa jednosmernim strujama pokazalo se pogodno da se uvede veličina recipročna otpornosti, koja je nazvana provodnost. Odgovarajuća definicija se može dati i kod kola sa naizmeničnim strujama. Dakle, recipročna vrednost impedanse, koja predstavlja količnik fazora struje i napona:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} \quad (5.50)$$

naziva se *admitansa*. Jedinica za admitansu je Simens (S).

Pošto je impedansa kompleksna veličina, admitansa je takođe kompleksna veličina. Ona se takođe može predstaviti preko svog modula i argumenta kao:

$$\mathbf{Y} = \frac{I_M \angle \theta_i}{V_M \angle \theta_v} = \frac{I_M}{V_M} \angle (\theta_i - \theta_v) = Y \angle \theta_y \quad (5.51)$$

ili preko svog realnog i imaginarnog dela:

$$\mathbf{Y}(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) \quad (5.52)$$

Realni deo admitanse $G(\omega)$ se naziva *konduktansa*, dok se imaginarni deo admitanse naziva *susceptansa*.

Na osnovu prethodnih jednačina lako je uspostaviti veze između komponenata impedanse i reaktanse. Polazeći od jednačine:

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad (5.53)$$

lako se dobija:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (5.54)$$

Na sličan način se dobijaju dualne relacije:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (5.55)$$

Interesantno je primetiti da rezistansa i konduktansa nisu recipročne veličine, i da takođe reaktansa i susceptansa nisu recipročne veličine.

Na kraju, prikazimo tabelarno impedanse i admitanse tri osnovna električna elementa, otpornika, kalema i kondenzatora, koje ćemo često koristiti u proučavanju električnih kola:

Element	Impedansa (\mathbf{Z})	Admitansa (\mathbf{Y})
Otpornik (R)	$\mathbf{Z}_R = R$	$\mathbf{Y}_R = G = 1/R$
Kalem (L)	$\mathbf{Z}_L = j\omega L$	$\mathbf{Y}_L = 1/j\omega L = -j/\omega L$
Kondenzator (C)	$\mathbf{Z}_C = 1/j\omega C = -j/\omega C$	$\mathbf{Y}_C = j\omega C$

5.5 Snaga koja se razvija na proizvoljnom elementu

Neka su u vremenskom domenu napon i struja na nekom elementu kola jednaki $V_M \cos(\omega t + \theta_v)$ i $I_M \cos(\omega t + \theta_i)$, odnosno, neka su u frekvencijskom domenu njihovi fazori $\mathbf{V} = V_M e^{j\theta_v} = V_M \angle \theta_v$ i $\mathbf{I} = I_M e^{j\theta_i} = I_M \angle \theta_i$. Kao što smo već rekli srednja snaga je po definiciji srednja vrednost proizvoda napona i struje u okviru jedne periode. Dakle

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T V_M \cos(\omega t + \theta_v) I_M \cos(\omega t + \theta_i) dt \\
 &= \frac{V_M I_M}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) + \cos(\theta_v - \theta_i)] dt \\
 &= \frac{V_M I_M}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{V_M I_M}{2} \cos \phi
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

gde je $\phi = \theta_v - \theta_i$ fazna razlika između napona na elementu i struje kroz element.

Posebno je interesantan slučaj snage na otporniku. Tada su napon i struja u fazi, pa je $\phi = \theta_v - \theta_i = 0$. Snaga na otporniku je onda data jednostavnim izrazom:

$$P = \frac{V_M I_M}{2} \tag{5.57}$$

odnosno jednaka je polovini proizvoda amplituda struje i napona. S obzirom da je kod otpornika $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$, izraz (5.57) se može napisati i kao:

$$P = \frac{RI_M^2}{2} = \frac{V_M^2}{2R} \tag{5.58}$$

Zamislimo sada da kroz isti otpornik teče neka jednosmerna struja I i da je tada napon na njemu V i da usvojeni napon i struja na otporniku razvijaju istu snagu kao u slučaju sinusoidalne pobude. Termodinamički posmatrano, takva vrednost struje naziva *efektivna vrednost struje*, a napona *efektivna vrednost napona*. Pošto je u jednosmernom režimu $V_{ef} = RI_{ef}$, sleduje:

$$P = V_{ef} I_{ef} = RI_{ef}^2 = \frac{V_{ef}^2}{R} \tag{5.59}$$

Izjednačavanjem snaga iz izraza (5.58) i (5.59) se dobija:

$$V_{ef} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}, \quad I_{ef} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \quad (5.60)$$

odnosno, efektivna vrednost napona na otporniku ili struje kroz otpornik dobija se deljenjem amplitude napona ili struje sa kvadratnim korenom iz 2 što je rezultat identičan rezultatu dobijenom u poglavlju xxx. Dakle, termodinamička *efektivna vrednost* je identična *srednjoj kvadratnoj vrednosti*, a oznaka *ef* u indeksu **može da se izostavi**, odnosno:

$$V = V_{ef} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}, \quad I = I_{ef} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}. \quad (5.61)$$

Kompleksni račun je pogodan i za računanje sva tri vida snage definisane jednačinama 5.22-5.24. Kompleksna snaga se definiše kao

$$\mathbf{S} = P + jQ = VI \cos \phi + jVI \sin \phi = VIe^{j\phi} = Se^{j\phi}, \quad (5.62)$$

Pri čemu je $Q/P = \tan \phi$. Ako je $\mathbf{V} = Ve^{j\psi}$, $\mathbf{I} = Ie^{j\theta}$, i $\mathbf{I}^* = Ie^{-j\theta}$. Kako je

$$\underline{V} \cdot \underline{I}^* = VI \cdot e^{j\psi} \cdot e^{-j\theta} = VI \cdot e^{j(\psi-\theta)} = VIe^{j\phi} = \underline{S} \quad (5.63)$$

vidi se da je proizvod napona i konjugovano kompleksne vrednosti struje dovoljan za računanje kompleksne snage koja u sebi sadrži i reaktivnu i aktivnu snagu. Kako je ispunjeno da je

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}, \quad (5.64)$$

sledeće da je

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{Z} \cdot I^2 = R \cdot I^2 + jX \cdot I^2 \quad (5.65)$$

Dakle,

$$P = R \cdot I^2, \quad Q = X \cdot I^2. \quad (5.66)$$

Za admitansu važe slične formule:

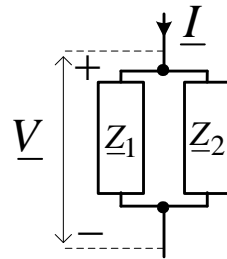
$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{Y})^* = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{Y}^* = V^2 \cdot \mathbf{Y}^* = G \cdot V^2 - jB \cdot V^2 \\ P &= G \cdot V^2, \quad Q = -B \cdot V^2 \end{aligned} \quad (5.67)$$

Vidi se da ako su poznati realni i imaginarni delovi impedanse potrošača, dovoljne su i efektivne vrednosti napona i struje za računanje obe komponente snage.

Primer 5.3

Potrošač se sastoji od paralelne veze dva manja potrošača $\mathbf{Z}_1 = 5k\Omega + j10k\Omega$ i \mathbf{Z}_2 nepoznate vrednosti, slika P 5.3.1. Izmerena aktivna snaga potrošača je $P = 5.6 \text{ W}$ a reaktivna

$Q = -0.8$ VAR. Struja drugog potrošača fazno prednjači 45° u odnosu na napon. Odrediti efektivne vrednosti svih struja.



Slika P 5.3.1 uz primer 5.3

Rešenje:

Direktnom i sukcesivnom primenom formula od 5.64 do 5.67, dobija se rešenje.

$$\underline{Y} = G + jB = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1 + G_2 + j(B_1 + B_2)$$

$$G_1 = R_1 / (R_1^2 + X_1^2) = 40 \mu S$$

$$B_1 = -X_1 / (R_1^2 + X_1^2) = -80 \mu S$$

$$P = V^2 G = V^2 (G_1 + G_2)$$

$$Q = -V^2 B = -V^2 (B_1 + B_2)$$

$$\phi_2 = \psi - \theta_2 = -45^\circ = -\pi / 4$$

$$\tan \phi_2 = -1 = \frac{Q_2}{P_2} = \frac{-V^2 B_2}{V^2 G_2} \Rightarrow B_2 = G_2$$

$$Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} = 40\sqrt{5} \mu S \Rightarrow I_1 = V \cdot Y_1 = 8\sqrt{5} \text{ mA}$$

$$Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2} = 100\sqrt{2} \mu S \Rightarrow I_2 = V \cdot Y_2 = 20\sqrt{2} \text{ mA}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = 100\sqrt{2} \mu S \Rightarrow I = V \cdot Y = 20\sqrt{5} \text{ mA}$$

$$\left. \begin{array}{l} P = V^2 (G_1 + G_2) \\ Q = -V^2 (B_1 + B_2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} G_2 = P / V^2 - G_1 = 100 \mu S \\ B_2 = G_2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} P = V^2 (G_1 + G_2) \\ Q = -V^2 (B_1 + B_2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} P + Q = V^2 (G_1 - B_1) \\ V = \sqrt{\frac{P + Q}{G_1 - B_1}} = \sqrt{\frac{4.8}{120 \cdot 10^{-6}}} = 200 \text{ V} \end{array}$$

5.6 Kirhofovi zakoni u kolima sa naizmjeničnim strujama

U prethodnim izlaganjima već je rečeno da za kola s stalnim jednosmernim strujama kao i za kola sa promenljivim strujama važi prvi Kirhofov zakon koji kaže da je suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka nuli.

$$\sum_{j=1}^N i_j(t) = 0 \quad (5.68)$$

gde je $i_j(t)$ struja j -te grane koja ulazi u čvor, dok je N broj grana koje ulaze u čvor. U slučaju sinusoidalne pobude, struje u kolu su takođe sinusoidalne i imaju istu učestanost. Dakle, prethodna jednačina dobija oblik:

$$\sum_{j=1}^N I_{M_j} \cos(\omega t + \phi_j) = 0 \quad (5.69)$$

odakle se transformacijom sinusoidalnih veličina u fazore dobija prvi Kirhofov zakon za kola sa naizmjeničnim strujama u fazorskom obliku:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{I}_j = 0 \quad (5.70)$$

gde je \mathbf{I}_j fazor struje j -te grane koja ulazi u čvor, dok je N broj grana koje ulaze u čvor. Dakle, u frekvencijskom (fazorskom) domenu prvi Kirhofov zakon glasi: *Suma fazora struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je nuli.*

Na isti način se polazeći od jednačine po drugom Kirhofovom zakonu u vremenskom domenu:

$$\sum_{j=1}^N v_j(t) = 0 \quad (5.71)$$

transformacijom sinusoidalnih veličina u vremenskom domenu u fazore, dobija drugi Kirhofov zakon za kola sa naizmjeničnim strujama u fazorskom obliku:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{V}_j = 0 \quad (5.72)$$

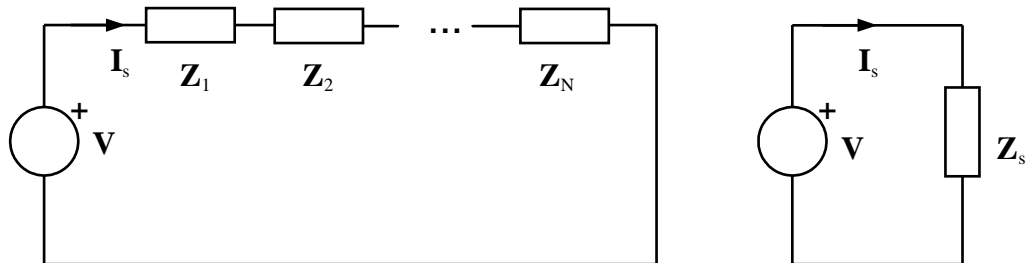
gde je \mathbf{V}_j fazor napona na j -toj grani petlje koja ukupno ima N grana. Dakle, u frekvencijskom (fazorskom) domenu drugi Kirhofov zakon glasi: *Suma fazora napona u bilo kojoj petlji kola jednaka je nuli.*

5.7 Osnovne transformacije u kolima sa naizmjeničnim strujama

Primenom prvog i drugog Kirhofovog zakona neka kola se mogu uprostiti, što smanjuje broj jednačina kojima se ona opisuju i olakšava njihovo rešavanje. U narednom izlaganju biće ukratko opisane neke takve transformacije:

5.7.1 Serijska (redna) veza impedansi

Ako se N impedansi tako poveže tako da se u svakom čvoru stiču samo po dve impedanse (osim kod prvog i poslednjeg čvora), takva veza se naziva *serijska* ili *redna veza* impedansi i prikazana je na slici 5.3a.



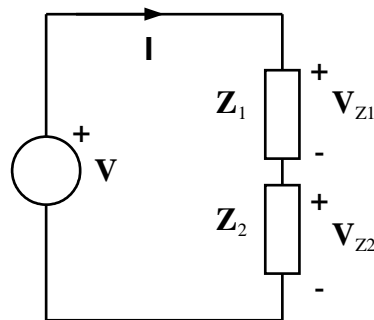
Slika 5.3: Serijska (redna) veza impedansi.

Primenom drugog Kirhofovog zakona dobija se ekvivalentna impedansa kojom se može zameniti serijska veza impedansi:

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_N \quad (5.73)$$

odnosno, *ekvivalentna impedansa serijski vezanih impedansi jednaka je zbiru pojedinačnih impedansi.*

Posmatrajmo dve serijski vezane impedanse koje formiraju razdelnik napona, kao na slici 5.4.



Slika 5.4: Delitelj (razdelnik) napona.

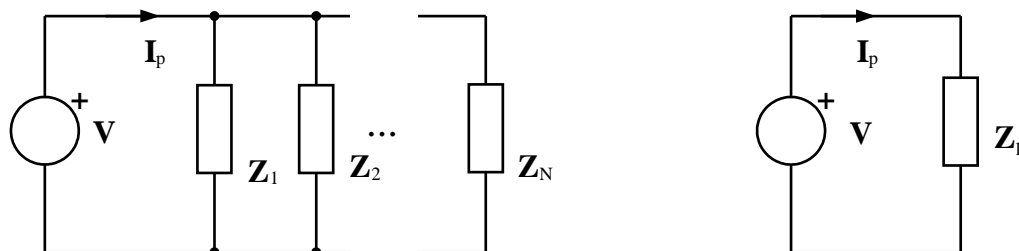
Pošto kroz oba impedanse protiče ista struja, naponi na impedansama su:

$$\mathbf{V}_{z_1} = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}_{z_2} = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{V} \quad (5.74)$$

odnosno, *napon izvora V deli se između impedansi \mathbf{Z}_1 i \mathbf{Z}_2 u direktnoj srazmeri sa njihovim vrednostima.*

5.7.2 Paralelna veza impedansi

Ako se N impedansi tako poveže da sve imaju zajedničke priključke, takva veza se naziva *paralelna veza impedansi* i prikazana je na slici 5.5a.



Slika 5.5: Paralelna veza impedansi.

Primenom prvog Kirhofovog zakona dobija se ekvivalentna impedansa (admitansa) kojom se može zameniti paralelna veza impedansi:

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{Y}_N \quad (5.75)$$

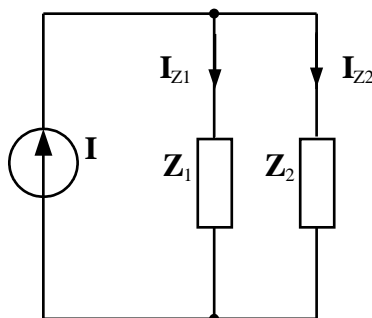
odnosno, *ekvivalentna admitansa paralelno vezanih admitansi jednaka je zbiru pojedinačnih admitansi*. Alternativni oblik prethodne jednačine je:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_p} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N} \quad (5.76)$$

Posmatrajmo sada dve paralelno vezane impedanse koje formiraju razdelnik struje, kao na slici 5.6. Pošto je napon na obe impedanse isti, struje kroz paralelno vezane impedanse su:

$$\mathbf{I}_{Z_1} = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{I}, \quad \mathbf{I}_{Z_2} = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{I} \quad (5.77)$$

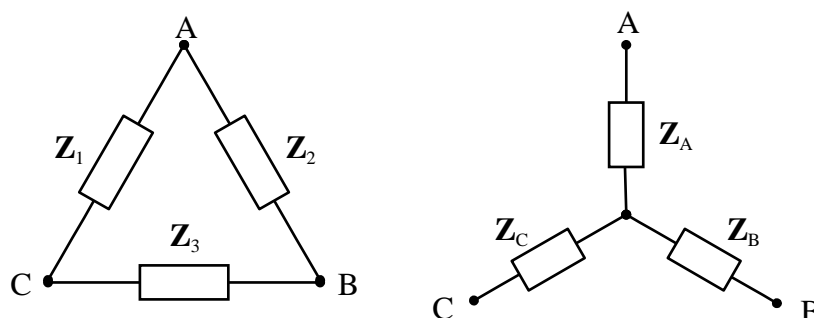
odnosno, *struja izvora \mathbf{I} deli se između impedansi \mathbf{Z}_1 i \mathbf{Z}_2 u obrnutoj srazmeri sa njihovim vrednostima*.



Slika 5.6: Delitelj (razdelnik) struje.

5.7.3 Transformacije trougao – zvezda i zvezda - trougao

Transformacije trougla u zvezdu i zvezde u trougao mogu se primeniti i na impedanse i prikazane su na slici 5.7.



Slika 5.7: Vezivanje impedansi u trougao (Δ) i zvezdu (Y).

Da bi ova dva kola bila ekvivalentna, impedansa između ma koje dve tačke u oba kola, kada se treća tačka ostavi nepovezana, mora biti ista. Korišćenjem pravila za paralelno i serijsko vezivanje otpornika, sa slike 5.7 se dobijaju relacije ekvivalencije:

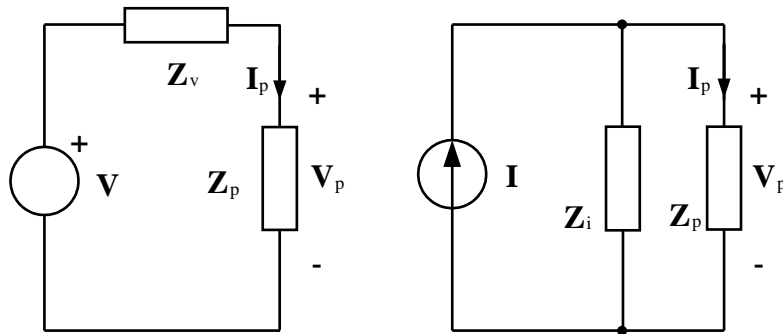
$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ Z_B &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ Z_C &= \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \end{aligned} \quad (5.78)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_B} \\ Z_2 &= \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_C} \\ Z_3 &= \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_A} \end{aligned} \quad (5.79)$$

5.7.4 Transformacije izvora u kolima sa naizmeničnim strujama

Posmatrajmo kola prikazana na slici 5.8, gde su prikazani neidealni naponski izvor, koji ima konačnu unutrašnju impedansu Z_v , i neidealni strujni izvor, koji ima konačnu unutrašnju admitansu $Y_i = 1/Z_i$.



Slika 3.8: Neidealni naponski i strujni izvor.

Do uslova ekvivalencije realnog naponskog i strujnog izvora se lako može doći posmatranjem slike 5.8. Ako se na realni strujni ili naponski izvor priključi ista impedansa Z_p , onda u slučaju ekvivalentnih izvora struja kroz impedansu Z_p mora biti isti u oba kola. Po Omovom zakonu, onda je isti i napon V_p . Dakle, iz uslova jednakosti struja kroz Z_p :

$$I_p = \frac{1}{Z_v + Z_p} V = \frac{Z_i}{Z_i + Z_p} I \quad (5.80)$$

direktno se dobijaju uslovi ekvivalencije realnog naponskog i strujnog izvora:

$$V = Z_i I, \quad Z_v = Z_i \quad (5.81)$$

Dakle, ako u kolu imamo strujni izvor struje I i njemu paralelno vezanu impedansu Z , onda se ova kombinacija može zameniti ekvivalentnim naponskim izvorom napona $V = RI$ i serijski vezanom impedansom Z . Takođe važi i obrnuto: ako u kolu imamo naponski izvor napona V sa serijski vezanom impedansom Z , onda se ova kombinacija može zameniti ekvivalentnim strujnim izvorom struje $I = V/Z$ i njemu paralelno vezanom impedansom Z . Ostali parametri kola u kome se nalaze nezavisni izvori ostaju nepromenjeni.

Napomenimo da ekvivalencija važi i za kontrolisane generatore.

5.8 Sistem jednačina napona čvorova za kola sa naizmjeničnim strujama

Kao i kod analize jednosmernog režima, i kod kola sa naizmjeničnim strujama može se primeniti *sistem jednačina napona čvorova* za rešavanje kola. U slučaju kola sa N čvorova, broj linearnih jednačina u sistemu je $N-1$. U slučaju kola sa N čvorova, broj nepoznatih veličina (napona) u sistemu $N-1$, tj. isti je kao broj jednačina. Sistem jednačina napona čvorova predstavlja *sistem linearnih jednačina sa kompleksnim koeficijentima* i izgleda ovako:

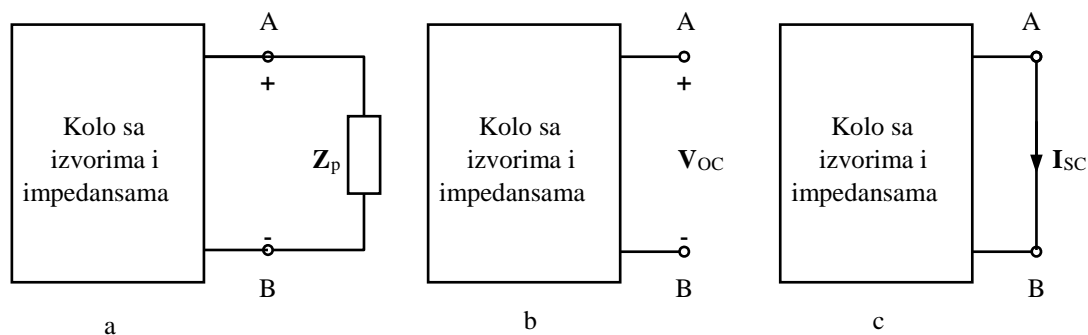
$$\begin{aligned} Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + \dots + Y_{1N-1} V_{N-1} &= I_1 \\ Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 + \dots + Y_{2N-1} V_{N-1} &= I_2 \\ \vdots & \\ Y_{N-11} V_1 + Y_{N-12} V_2 + \dots + Y_{N-1N-1} V_{N-1} &= I_{N-1} \end{aligned} \quad (5.82)$$

Elementi matrice sistema van glavne dijagonale, Y_{mn} gde je $m \neq n$, predstavljaju zbir admitansi svih grana između čvorova m i n i uvek imaju negativni predznak. Dijagonalni

elementi, \mathbf{Y}_{kk} , predstavljaju zbir provodnosti svih grana koje se stiču u čvoru k i uvek imaju pozitivan predznak. Struje sa desne strane jednačina, \mathbf{I}_k , predstavljaju struje izvora koje utiču u odgovarajući čvor k . Ovaj sistem jednačina se može i direktno napisati samo na osnovu posmatranja kola.

5.9 Tevenenova i Nortonova teorema za kola sa naizmeničnim strujama

Pretpostavimo da imamo neko električno kolo sa naizmeničnom pobudom i da želimo da odredimo struju, napon ili snagu na nekoj impedansi, koji ćemo nazvati *potrošač* i obeležiti sa \mathbf{Z}_p . Ovaj slučaj je ilustrovan na slici 5.9a. Tevenenova i Nortonova teorema pokazuju kako se celo kolo, osim potrošača, može zameniti ekvivalentnim realnim naponskim ili strujnim izvorom, tako da struja i napon potrošača ostanu nepromenjeni.

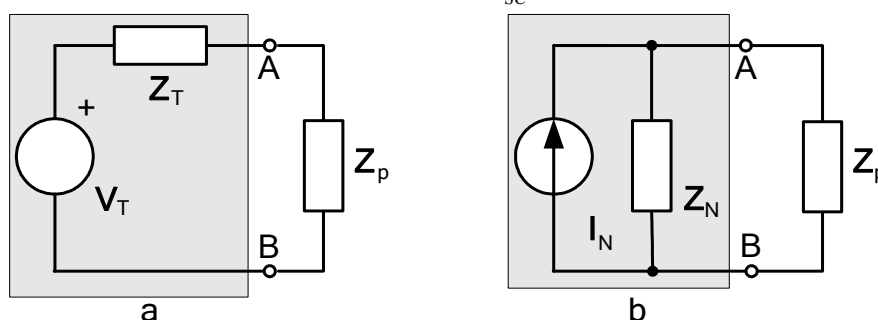


Slika 5.9: Određivanje napona otvorenih krajeva i struje kratkog spoja.

Posmatrajmo kolo na sl. 5.9a. Ako se potrošač isključi iz kola, pristupni krajevi ostaju otvoreni i na njima postoji napon koji ćemo nazvati napon otvorene veze i obeležiti sa \mathbf{V}_{OC} , kao na slici 5.9b. Međutim, ako se posle isključenja potrošača pristupni krajevi kratko spoje, onda između njih postoji struja kratkog spoja, koju ćemo obeležiti sa \mathbf{I}_{SC} , kao na slici 5.9c.

Za izvođenje *Tevenenove teoreme* posmatrajmo kolo na sl. 5.10a, u kome je kompletno kolo sa izvorima i impedansama (bez potrošača) zamenjeno ekvivalentnim naponskim izvorom \mathbf{V}_T i serijski vezanim impedansom \mathbf{Z}_T . Poređenjem kola sa slike 5.9 i slike 5.10a, lako se vidi da su struja kroz potrošač i napon na potrošaču isti ako je:

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_{OC}, \quad \mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{V}_{OC}}{\mathbf{I}_{SC}} \quad (5.83)$$



Slika 5.10: Tevenenova i Nortonova teorema.

Ove relacije predstavljaju Thevenenovu teoremu koja glasi: Svako električno kolo sa zavisnim i nezavisnim izvorima i impedansama se može zameniti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog naponskog izvora V_T , čiji je napon jednak naponu kola sa isključenim potrošačem V_{OC} , i serijske impedanse Z_T , čija je impedansa jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem V_{OC} i struje kroz kratkospojeni potrošač I_{SC} .

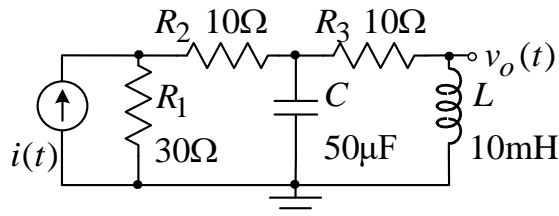
Za izvođenje *Nortonove teoreme* posmatrajmo kolo na sl. 5.10b, u kome je kompletno kolo sa izvorima i impedansama (bez potrošača) zamenjeno ekvivalentnim strujnim izvorom I_N i paralelno vezanom impedansom Z_N . Poređenjem kola sa slike 5.9 i slike 5.10b, lako se vidi da su struja kroz potrošač i napon na potrošaču isti ako je:

$$I_N = I_{SC}, \quad Z_N = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} \quad (5.84)$$

Ove relacije predstavljaju Nortonovu teoremu koja glasi: Svako električno kolo sa zavisnim i nezavisnim izvorima i impedansama se može zameniti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog strujnog izvora I_N , čija je struja jednaka struji kroz kratkospojeni potrošač I_{SC} , i paralelne impedanse Z_N , čija je impedansa jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem V_{OC} i struje kroz kratkospojeni potrošač I_{SC} .

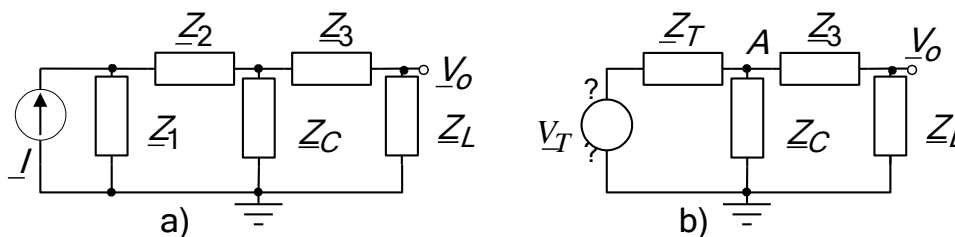
Primer 5.4

Dato je kolo ka na slici 5.4.1. Ako je $i(t) = 5A \cdot \sin(1000t)$, odrediti $v_o(t)$.



Slika 5.4.1 Slika uz primer 5.4

Rešenje: Prvi korak u rešavanju ovakvog zadatka je predstavljanje svih komponenti njihovim kompleksnim ekvivalentima. Na slici 5.4.2 je prikazano modifikovano kolo, pri čemu važi da je $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi / 2) \Rightarrow \underline{I} = I e^{-j\pi/2} = -jI$, $I = 5A / \sqrt{2}$.



Slika 5.4.2

Strujni izvor i impedanse Z_1 i Z_2 se mogu ekvivalentirati Tevenenovim generatorom, slika 5.4.2 b), pri čemu važi da su $V_T = Z_1 I = -j \cdot 150V / \sqrt{2}$, i $Z_T = Z_1 + Z_2 = 40\Omega = R_T$. Po metodi potencijala čvorova dovoljna je samo jednačina za čvor A:

$$\underline{V}_A (Y_T + Y_C + Y_{3L}) = \underline{V}_T Y_T$$

čiji je drugi oblik

$$\underline{V}_A \left(\frac{1}{R_T} + j\omega C + \frac{1}{R_3 + j\omega L} \right) = \underline{V}_T \frac{1}{R_T}$$

Sređivanjem prethodne jednačine dobija se

$$\underline{V}_A (R_3 + j\omega L + j\omega C(R_3 + j\omega L)R_T + R_T) = \underline{V}_T (R_3 + j\omega L) \quad (5.85)$$

pri čemu su vrednosti pojedinih impedansi $j\omega L = j10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = j10i$

$j\omega C = j10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = j5 \cdot 10^{-2}$. Zamenom istih u jednačinu 5.85 dobija se:

$$\underline{V}_A(5 + j + j2(1 + j)) = \underline{V}_A(5 + j - 2 + 2j) = \underline{V}_T(1 + j),$$

$$\rightarrow \underline{V}_A = \underline{V}_T \frac{1 + j}{3 + 3j} = \frac{\underline{V}_T}{3} = -j \cdot 50\text{V} / \sqrt{2}.$$

Izlazni napon se dobija preko razdelnika napona:

$$\underline{V}_o = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_L} \cdot \underline{V}_A = \underline{V}_o = \frac{j\omega L}{R_3 + j\omega L} \cdot \underline{V}_A = \frac{10j}{10 + 10j} \cdot \underline{V}_A = \frac{j}{1 + j} \cdot \underline{V}_A =$$

$$= \frac{j}{\sqrt{2}e^{j\pi/4}} \cdot \underline{V}_A = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2}} \cdot j \cdot (-j) \cdot 50\text{V} / \sqrt{2} = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2}} \cdot 50\text{V} / \sqrt{2} =$$

$$= e^{-j\pi/4} 35.36\text{V} / \sqrt{2} = \underline{V}_o \cdot e^{-j\pi/4}.$$

Kako je potrebno odrediti izlazni napon u vremenskom domenu, on treba da je u formi

$$v_o(t) = V_{om} \cos(\omega t + \alpha),$$

što znači da je $V_{om} = V_o \cdot \sqrt{2} = 35.36\text{V}$, $\alpha = -\pi/4$.

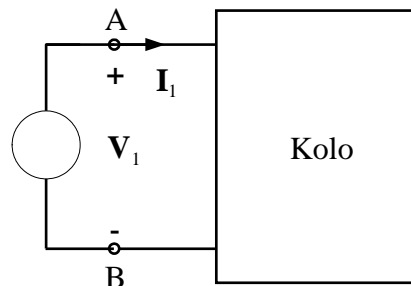
5.10 Kola sa jednim i dva pristupa u kompleksnom domenu

Posmatrajmo kolo na slici 5.11 kod koga je između čvorova A i B priključen pobudni izvor koji može biti strujni ili naponski. U oba slučaja napon na pristupu obeležimo sa \underline{V}_1 a struju koja utiče u kolo sa \underline{I}_1 . Ovakvo kolo se naziva *kolo sa jednim pristupom*.

Ako je pobudni izvor strujni generator, onda *ulazni napon predstavlja odziv kola na primenjenu pobudu*. Količnik fazora odziva i pobude:

$$\underline{Z}_u = \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} \quad (5.86)$$

naziva se *ulazna impedansa kola*.



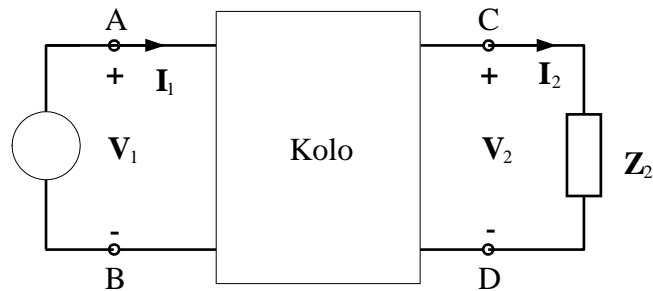
Slika 5.11: Kolo sa jednim pristupom.

Ako je pobudni izvor naponski generator, onda *ulazna struja predstavlja odziv kola na primenjenu pobudu*. Količnik fazora odziva i pobude:

$$\mathbf{Y}_u = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \quad (5.87)$$

naziva se *ulazna admitansa* kola.

Posmatrajmo sada kolo na slici 5.12 kod koga je između čvorova A i B priključen pobudni izvor, koji može biti strujni ili naponski, a između čvorova C i D potrošač, čija je impedansa \mathbf{Z}_p . Ovakvo kolo se naziva *kolo sa dva pristupa*. Napon i struju na prvom pristupu obeležimo sa \mathbf{V}_1 i \mathbf{I}_1 , a napon i struju na drugom pristupu sa \mathbf{V}_2 i \mathbf{I}_2 .



Slika 5.12: Kolo sa dva pristupa.

Ako je pobudni izvor strujni generator, onda se za kolo na slici 5.12 mogu definisati tri odnosa:

$$\mathbf{Z}_u = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \quad (5.88)$$

koji se naziva se *ulazna impedansa* kola,

$$\mathbf{Z}_{12} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \quad (5.89)$$

koji se naziva *prenosna impedansa (transimpedansa)* kola, i,

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \quad (5.90)$$

koji se naziva *strujno pojačanje* kola. Ako je pobudni izvor naponski generator, onda se za kolo na slici 5.12 mogu definisati još tri odnosa:

$$\mathbf{Y}_u = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \quad (5.91)$$

koji se naziva se *ulazna admitansa* kola,

$$\mathbf{Y}_{12} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} \quad (5.92)$$

koji se naziva *prenosna admitansa (transadmitansa)* kola, i,

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \quad (5.93)$$

koji se naziva *naponsko pojačanje* kola. Uopšteno, odnos izlazne veličine i ulazne veličine, naziva se *funkcija prenosa*, i obično se obeležava slovom H .

Sve navedene funkcije su kompleksne i imaju argument $j\omega$. Ako se argument navodi ili je kontest takav da se podrazumeva kompleksni domen, u velikom delu literature se ne koristi boldovanje ili podvlačenje simbola, na primer:

$$\mathbf{Z}_u = \underline{Z}_u = Z_u(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)}, \quad \mathbf{H} = \underline{H} = H(j\omega) = \frac{V_I(j\omega)}{V_G(j\omega)}. \quad (5.94)$$

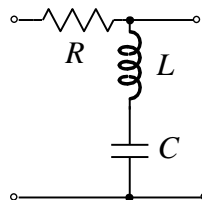
Ovakva predstava navedenih veličina omogućuje da se analiziraju funkcije kola na različitim učestanostima. Takve karakteristike se nazivaju *frekvencijske karakteristike* kola. Pošto se radi o kompleksnim funkcijama, posebno se analiziraju njihov moduo i faza:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (5.95)$$

Moduo kompleksne funkcije $|H(j\omega)|$ se naziva amplitudska karakteristika, dok se njen argument $\varphi(\omega)$ naziva fazna karakteristika kola. Osa učestanosti i amplitudska karakteristika se obično predstavljaju u logaritamskoj razmeri.

Primer 5.5

Odrediti funkciju prenosa kola sa slike:



Slika 5.5.1 Slika za primer 5.5

Rešenje:

$$H(j\omega) = \frac{Z_{LC}(j\omega)}{R + Z_{LC}(j\omega)} = \frac{j\omega L + 1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

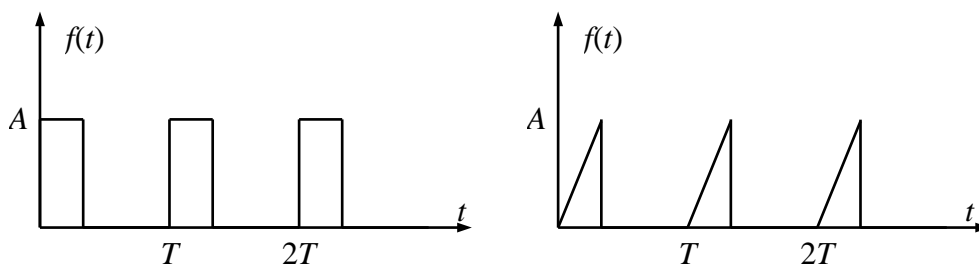
5.11 Analiza kola u ustaljenom složenoperiodičnom režimu

U dosadašnjim razmatranjima uvek smo pretpostavljali da je napon ili struja pobudnog generatora sinusoidalni signal fiksne učestanosti, tzv. *prostoperiodični signal*. Međutim, u praksi se često sreću i signali koji nisu sinusoidalni, ali su periodični, ili čak nisu ni periodični.

Posmatrajmo neki periodični signal, koji za svako t zadovoljava relaciju:

$$f(t) = f(t+nT), \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (5.96)$$

gde je T perioda signala. Pri tome $f(t)$ može biti struja, napon ili potencijal. Primeri ovakvih signala su povorke pravougaonih ili trougaonih signala, koje se često sreću u elektronskim sistemima, a koje su prikazane na slici 5.13.



Slika 5.13: Nesinusoidalni periodični signali.

U matematičkoj teoriji Furijeovih redova pokazuje se da se svaka periodična funkcija $f(t)$ može predstaviti pomoću zbira sinusoidalnih funkcija, koje su linearno nezavisne. Dakle, imamo:

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (5.97)$$

gde je $\omega_0 = 2\pi/T$ osnovna učestanost signala, a a_0 predstavlja srednju vrednost signala ili DC komponentu signala, dok ostatak sa desne strane jednakosti u formuli 5.72 predstavlja naizmeničnu ili AC komponentu signala. Pri tome je značajno pomenuti da se u tehnici često koristi notacija obeležavanja signala koja razlikuje ukupan signal od AC i DC komponente:

$$x_{AC+DC}(t) = X_{DC} + x_{AC}(t) \quad (5.98)$$

Posmatrajmo malo detaljnije izraz 5.72. Perioda sinusoidalne komponente za $n=1$ je T , perioda sinusoidalne komponente za $n=2$ je $T/2$, perioda sinusoidalne komponente za $n=3$ je $T/3$, itd. U opštem slučaju, perioda sinusoidalne komponente za $n=k$ je T/k . Takva komponenta se naziva *k-ta harmonijska komponenta* ili kraće *k-ti harmonik*. Jednačina k -tog harmonika je $f_k \cos(n\omega_0 t + \theta_k)$, a fazor koji ga predstavlja je $f_k \angle \theta_k$.

Pošto se $\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ može po Ojlerovoj formuli predstaviti u eksponencijalnom obliku, prethodni razvoj funkcije $f(t)$ se može napisati i u ekvivalentnom obliku:

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} f_n e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (5.99)$$

gde se kompleksne konstante \mathbf{c}_n nazivaju *Furijeovi koeficijenti*. Ovi koeficijenti se mogu odrediti na jednostavan način. Ako se jednačina (5.99) pomnoži sa $e^{-jk\omega_0 t}$ i odredi integral obe strane jednačine u okviru jedne periode, dobija se:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \int_{t_1}^{t_1+T} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt \quad (5.100)$$

Pošto je:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ T & n = k \end{cases} \quad (5.101)$$

konačno se dobija:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5.102)$$

Pri tome važe međusobne relacije između različitih vidova koeficijenata:

$$f_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|\mathbf{c}_k| \quad (5.103)$$

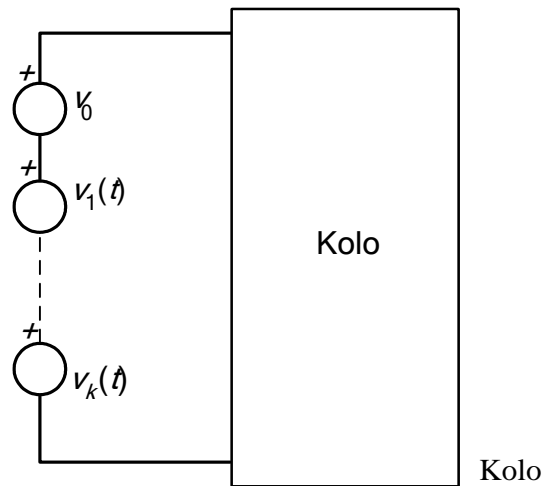
$$\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = \arg\{\mathbf{c}_k\}, \quad (5.104)$$

$$\mathbf{c}_k = (a_k - jb_k) / 2, \quad k \neq 0, \quad \mathbf{c}_0 = a_0 = f_0. \quad (5.105)$$

Sumiranje u beskonačnim granicama ima samo teorijski značaj dok je u praktičnim primenama sumiranje ograničeno i indeks sumacije vrlo retko prelazi 10^3 . Neka se sada takav periodični signal koji ima konačan broj harmonijskih komponenti primeni kao pobuda nekog linearnog električnog kola. Ako je recimo pobudni signal napon, onda se, primenom razvoja u Furijeov red, pobudni složenoperiodični napon može predstaviti u vidu zbira prostoperiodičnih napona:

$$v(t) = v_0 + v_1(t) + v_2(t) + \dots \quad (5.106)$$

što se može ilustrovati slikom 5.14.



Slika 5.14: Kolo sa složenoperiodičnom pobudom.

U kolu na slici 5.14 svaki naponski generator ima svoju amplitudu i učestanost. Primenom fazorske analize može se odrediti odziv kola na svaku komponentu pobudnog signala u frekvencijskom domenu i prevesti u vremenski domen. Dalje, pošto je kolo linearno, može se primeniti princip superpozicije i ukupni odziv kola dobiti sumiranjem doprinosa svih komponenata pobudnog signala. Na taj način se dobija *ukupni odziv kola u ustaljenom složenoperiodičnom režimu*.

Analiza kola u ustaljenom složenoperiodičnom režimu je izuzetno bitan alat za razmatranje kvaliteta procesiranja snage i energije u elektroenergetici i energetskej elektronici. Nekoliko bitnijih formula, koje ćemo ovde navesti bez dokaza, igraju ključnu ulogu u analizi raznih vidova snaga koje se pojavljuju u kolima sa složenoperiodičnim pobudama:

Neka je dat složenoperiodični signal $x(t)$ osnovne periode T_0 :

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^n X_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (5.107)$$

Tada se kvadrat efektivne vrednosti složenoperiodičnog signala $x(t)$ može izračunati kao suma kvadrata efektivnih vrednosti njegovih harmonijskih komponenti:

$$X^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = X_0^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (5.108)$$

Signal $x(t)$ može biti napon struja ili potencijal. Bez izvođenja daćemo i izraze za aktivnu i reaktivnu snagu u složenoperiodičnom režimu:

$$S = V \cdot I, \quad P_k = V_k I_k \cos \phi_k, \quad P = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos \phi_k \quad (5.109)$$

$$Q_k = V_k I_k \sin \phi_k, \quad Q = \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \sin \phi_k, \quad S^2 \neq P^2 + Q^2$$

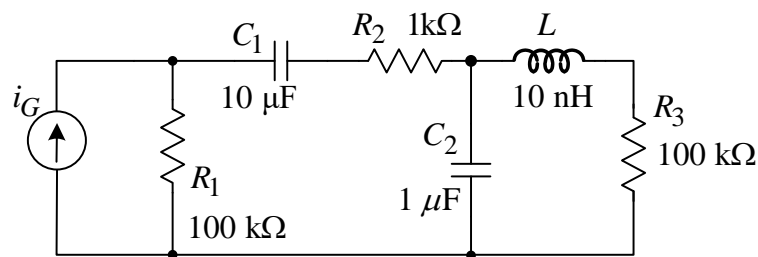
Bitno je napomenuti da se u mnogim praktičnim slučajevima razlaganje složenoperiodične pobude na prostoperiodične komponente može uraditi i jednostavnije nego što je prikazano formulom 5.102, a da se analiza kola može pojednostavljeno uraditi uvođenjem opravdanih inženjerskih aproksimacija.

Primer 5.5

U kolu sa slike 5.5.1 struja generatora je data izrazom $i_G(t) = I_m(1 + \cos(\omega t) \sin^2(\omega t))$.

- Razviti pobudni signal i_G u prostoperiodične komponente.
- Odrediti snagu koja se razvija na otporniku R_1 .
- Odrediti snagu koja se razvija na otporniku R_2 .

Poznato je: $I_m = 1 \text{ mA}$, $\omega = 100 \text{ krad/s}$.



Slika 5.5.1 Električno kolo u složenoperiodičnom režimu

Rešenje:

a) Primenom elementarnih trigonometrijskih transformacija složenoperiodični deo funkcije koja opisuje pobudni generator može da se predstavi u formi sume prostoperiodičnih funkcija:

$$\begin{aligned}
 i_G(t) &= I_m(1 + \cos(\omega t) \sin^2(\omega t)) = I_m \left(1 + \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \frac{(e^{\omega t} - e^{-\omega t})^2}{-4} \right) = \\
 &= I_m \left(1 - \frac{(e^{2\omega t} - e^{-2\omega t})(e^{\omega t} - e^{-\omega t})}{8} \right) = I_m \left(1 - \frac{e^{-3\omega t} - e^{-\omega t} - e^{\omega t} + e^{3\omega t}}{8} \right) = \\
 &= I_m \left(1 + \frac{1}{4} \frac{e^{-\omega t} + e^{\omega t}}{2} - \frac{1}{4} \frac{e^{-3\omega t} + e^{3\omega t}}{2} \right) = I_m \left(1 + \frac{1}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos(3\omega t + \pi) \right)
 \end{aligned}$$

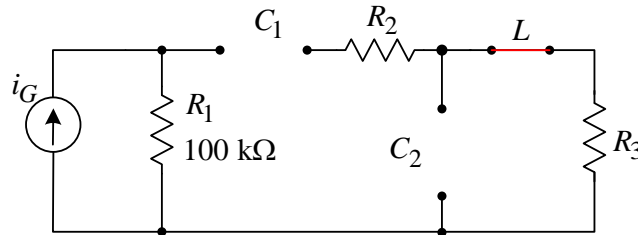
Alternativno se može iskoristiti trigonometrijski identitet:

$$\begin{aligned}
 \cos(\omega t) \sin^2(\omega t) &= \frac{1}{2} \sin(\omega t) \cdot (2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)) = \\
 &= \frac{1}{2} \sin(\omega t) \cdot \sin(2\omega t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)) \right).
 \end{aligned}$$

Dakle pobudni signal sadrži jednosmernu komponentu i naizmenične komponente na učestanostima ω i 3ω . Stoga se složenoperiodični režim celog kola određuje superpozicijom odziva na jednosmernu pobudu i odziva na prostoperiodične pobude na učestanostima ω i 3ω .

Odziv na jednosmernu pobudu se određuje rešavanjem jednosmernog kola u kome su kondenzatori otvorene veze, a kalemovi kratki spojevi, slika 5.5.2. Kao što se vidi, jednosmerna komponenta struje pobudnog generatora prolazi samo kroz R_1 i na njemu razvija snagu

$$P_{R_1}(DC) = R_1 I_m^2 = 100 \cdot 10^3 \cdot (10^{-3})^2 \text{ W} = 0.1 \text{ W} = 100 \text{ mW}$$



Slika 5.5.2 Ekvivalent kola za DC režim

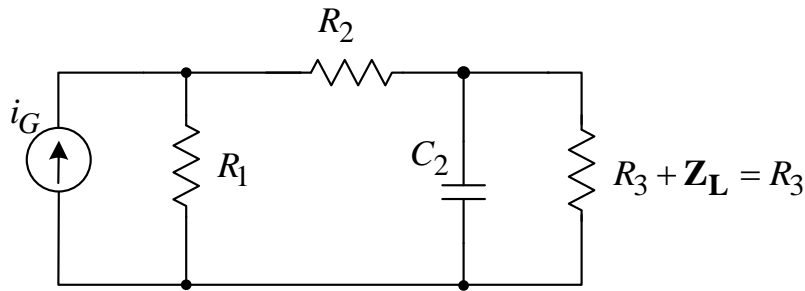
Da bi odredili odziv na prostoperiodične harmonijske komponente pobudnog generatora potrebno je odrediti impedanse reaktivnih komponenti na učestanostima ω i 3ω . Na učestanosti ω važi:

$$\begin{aligned} |Z_{C_1}| &= \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{100 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} \Omega = 1 \Omega, \\ |Z_{C_2}| &= \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{100 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} \Omega = 10 \Omega, \\ |Z_L| &= \omega L = 100 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \Omega = 0.1 \text{ m}\Omega \end{aligned} \quad (5.110)$$

Na učestanosti 3ω impedanse kondenzatora su 3x manje dok je impedansa kalema 3x veća u odnosu na impedanse računane na učestanosti ω .

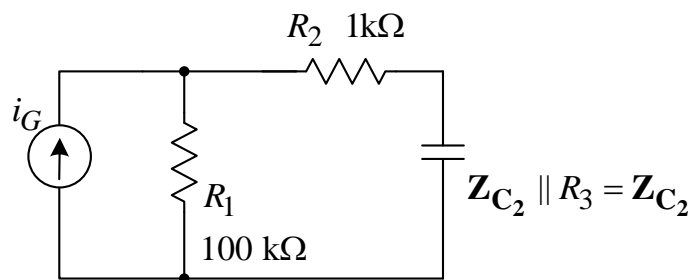
Kondenzator C_1 je povezan na red sa otpornikom R_2 i njegova impedansa je zanemariva u odnosu na otpornost R_2 , posmatrano na obe učestanosti ω i 3ω . Iz tog razloga se grana koja sadrži R_2 i C_1 može aproksimirati granom koja sadrži samo R_2 .

Kalem L je povezan na red sa otpornikom R_3 i u odnosu na njega impedansa mu je zanemariva, posmatrano na obe učestanosti ω i 3ω . Iz tog razloga se grana koja sadrži R_3 i L može aproksimirati granom koja sadrži samo R_3 . Pojednostavljeno kolo za učestanosti ω i 3ω sad izgleda kao na slici 5.5.2:



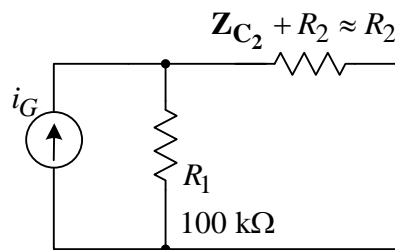
Slika 5.5.2: Pojednostavljeno kolo za učestanosti ω i 3ω

Kondenzator C_2 je sad paralelno sa otpornikom R_3 . Kako je njegova impedansa je zanemariva u odnosu na otpornost R_3 , posmatrano na obe učestanosti ω i 3ω , njihova paralelna veza se može aproksimirati samo kondenzatorom C_2 , slika 5.5.3.



Slika 5.5.3 Analiza impedansi u AC režimu

I na kraju kondenzator C_2 je redno vezan sa otpornikom R_2 . Kako je njegova impedansa je zanemariva u odnosu na otpornost R_2 , posmatrano na obe učestanosti ω i 3ω , njihova redna veza se može aproksimirati samo otpornikom R_2 . Krajnje uprošćeno kolo je prikazano na slici 5.5.4.



Slika 5.5.4: Krajnje uprošćeno kolo

Uprošćeno kolo važi na obe učestanosti ω i 3ω . Vidi se da se radi o strujnom razdelniku gde će struja da se deli u odnosu 100:1. Dakle može se smatrati da kompletna AC komponenta struje pobudnog generatora teče kroz R_2 , a da stoti deo AC koponente struje pobudnog generatora teče kroz R_1 . Snaga koja se razvijajau prostoperiodične komponente na otporniku R_2 iznosi, što je ujedno i ukupna snaga iznosi:

$$\begin{aligned}
P_{R_2} &= \overbrace{P_{R_2}(DC)}^{0!} + P_{R_2}(\omega) + P_{R_2}(3\omega) = R_1 \frac{\left(\frac{I_m}{4}\right)^2}{2} + R_1 \frac{\left(\frac{I_m}{4}\right)^2}{2} = \\
&= \frac{R_1 I_m^2}{16} = \frac{10^3 \cdot (10^{-3})^2}{16} \text{ W} = \frac{1}{16} \text{ mW}.
\end{aligned}
\tag{5.111}$$

Zbog toga što kroz R_1 teče 100x manja struja nego kroz R_2 , AC snaga koja se razvija na otporniku R_1 je 100x manja od P_{R_2} i zbog toga zanemarljiva u odnosu na DC snagu koja se razvija na otporniku R_1 :

$$P_{R_1} = P_{R_1}(DC) + \overbrace{P_{R_1}(\omega) + P_{R_1}(3\omega)}^{P_{R_2}/100} \approx P_{R_1}(DC)
\tag{5.112}$$

6. Osnovi fizike poluprovodnika

Kao što je već rečeno, prema svojoj provodnosti elektrotehnički materijali se dele na tri grupe: provodnike, poluprovodnike i izolatore. Poluprovodnički materijali predstavljaju osnov savremene elektronike, tako da ćemo u narednim izlaganjima ukratko razmotriti njihove najvažnije osobine, koje će nam pomoći da razumemo rad osnovnih poluprovodničkih komponenata: diode, bipolarnog tranzistora i MOS tranzistora. Najvažniji poluprovodnički materijali su silicijum (Si), germanijum (Ge) i galijum arsenid (GaAs).

6.1 Osnovni pojmovi o provodnosti materijala

Svaki električni provodnik možemo posmatrati na dva načina:

- Posmatrajući makroskopske efekte preko napona, struje, otpornosti, itd.
- Posmatrajući mikroskopske efekte preko električnog polja, gustine struje, itd.

Za prvi pristup može se koristiti Omov zakon:

$$V = RI \quad (6.1)$$

dok je za drugi pristup bolje iskoristiti relaciju između električnog polja i napona

$$E = \frac{V}{l} \quad (6.2)$$

gde je V napon na krajevima provodnika a l njegova dužina, kao i definiciju gustine struje:

$$J = \frac{I}{S} \quad (6.3)$$

gde je I struja kroz provodnik a S poprečni presek provodnika.

Zamenom u jednačinu za Omov zakon se dobija:

$$El = RJS \quad (6.4)$$

odnosno:

$$E = \frac{RJS}{l} = \rho J \quad (6.5)$$

tako da se konačno dobija:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (6.6)$$

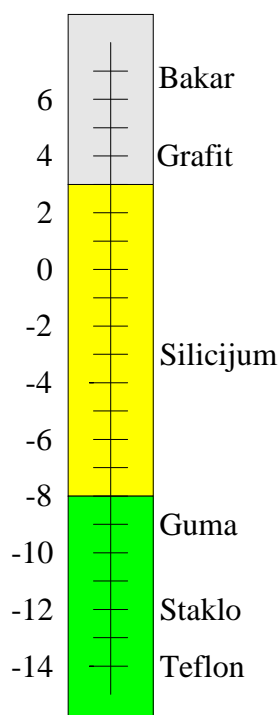
Konstanta ρ se naziva *specifična otpornost*. Njena jedinica je Ωm . Recipročna vrednost specifične otpornosti je *specifična provodnost*:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (6.7)$$

čija je jedinica S/m. Koristeći specifičnu provodnost, relacija između električnog polja i gustine struje se može napisati kao:

$$J = \sigma E \quad (6.8)$$

Specifična otpornost (provodnost) je karakteristika materijala. Dobri provodnici imaju malu specifičnu otpornost. Slika 6.1 prikazuje specifičnu provodnost raznih elektrotehničkih materijala u logaritamskoj razmeri:



Slika 6.1: Specifična provodnost nekih elektrotehničkih materijala.

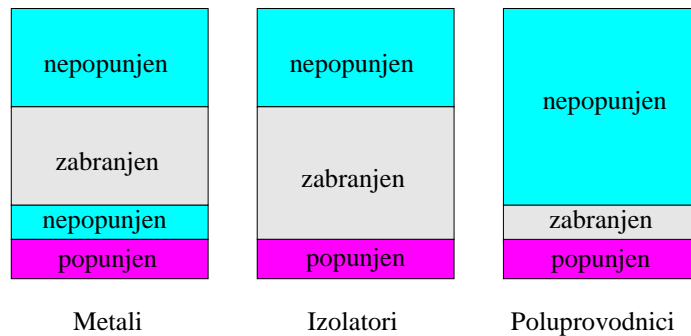
6.2 Elektronska struktura materijala

Provodnost materijala je direktno povezana sa elektronskom strukturom materijala. Kao što je poznato iz fizike, elektroni koji kruže oko jezgra atoma mogu imati energije koje odgovaraju diskretnim energetsom nivoima.

Metali imaju delimično popunjene energetske nivoe neposredno uz potpuno popunjene nivoe, što omogućava da elektroni lako napuste atom i slobodno se kreću kroz metal. Takvi elektroni se nazivaju *slobodni elektroni*.

Izolatori imaju veliku zabranjenu zonu između popunjenih i nepopunjenih energetskih nivoa, što zahteva da elektroni dobiju veliku energiju da bi preskočili zabranjenu zonu.

Poluprovodnici imaju usku zabranjenu zonu između popunjenih i nepopunjenih energetskih nivoa, tako da elektroni koji dobiju malu dodatnu energiju mogu preskočiti zabranjenu zonu i postati pokretni. Pošto energija elektrona zavisi od temperature, i provodnost poluprovodnika zavisi od temperature.



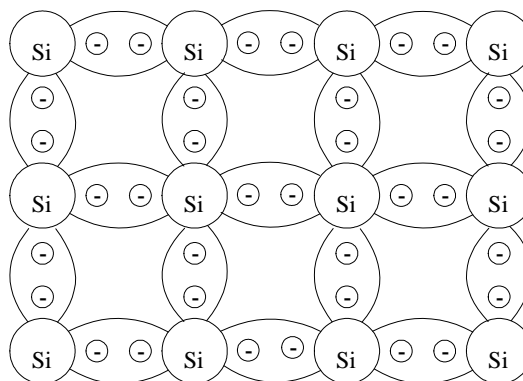
Slika 6.2: Energetski nivoi kod metala, izolatora i poluprovodnika.

6.3 Silicijum kao poluprovodnik

Silicijum je osnovni poluprovodnički materijal. Kristal čistog silicijuma ima pravilnu strukturu u kojoj atomi zadržavaju svoj položaj pomoću *kovalentnih veza* koje formiraju četiri valentna elektrona koji se nalaze u najvišem energetskom opsegu. Na sobnoj temperaturi kovalentne veze su dovoljno čvrste tako da je broj slobodnih elektrona veoma mali. Zbog toga je specifična provodnost čistog kristala silicijuma veoma mala.

Pošto su svi elektroni povezani valentnim vezama sa susednim atomima, silicijum bi trebalo da bude izolator. Međutim, čak i na sobnoj temperaturi, valentne veze su veoma slabe, tako da pojedini elektroni mogu lako da dobiju dovoljnu energiju da ih raskinu i postanu slobodni elektroni. Upraznjeno mesto elektrona u valentnoj vezi naziva se *šupljina*. Takav pozitivno nalektrisan atom može da privuče jedan elektron iz obližnje valentne veze, popuni raskinutu valentnu vezu i ponovo postane neutralan. Dakle, ekvivalentni efekt je kao da se pozitivno nalektrisanje kreće od atoma do atoma. Međutim, pošto je za kretanje šupljina potrebno pokrenuti više elektrona, pokretljivost šupljina je manja od pokretljivosti elektrona.

Pozitivno nalektrisan atom može da privuče i neki slobodni elektron i neutrališe se. Proces spajanja slobodnog elektrona i šupljine se naziva *rekombinacija*.



Slika 6.3: Kristalna rešetka čistog silicijuma.

Dakle, provodnost čistog silicijuma potiče od dva efekta:

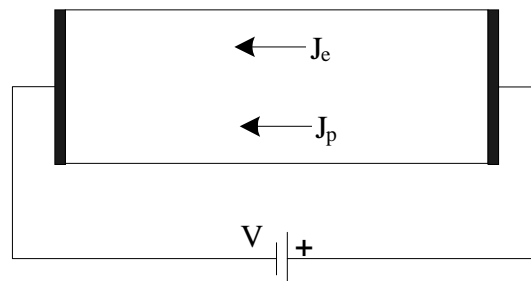
- Kretanja elektrona
- Kretanja šupljina

U čistom kristalu silicijuma broj slobodnih elektrona i broj šupljina moraju biti isti. Koncentracije slobodnih nosilaca u čistom kristalu se nazivaju *sopstvene koncentracije* koje zavise od temperature po formuli:

$$n_i^2 = BT^3 e^{-E_G/kT} \quad (6.9)$$

gde je B konstanta koja zavisi od materijala i za silicijum iznosi $5.4 \cdot 10^{31}$. $E_G = 1.12$ eV je parametar koji se naziva *energetski procep* i predstavlja minimalnu energiju za raskidanje kovalentne veze, dok je $k = 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/°K Boltzmanova konstanta. Sopstvene koncentracije elektrona i šupljina na sobnoj temperaturi $T = 300^\circ \text{K} = 27^\circ \text{C}$ su $n_i = p_i = 1.5 \cdot 10^{16}$ nosilaca/m³ i veoma su male u odnosu na gustinu atoma u kristalu silicijuma $5 \cdot 10^{28}$ atoma/m³. Dakle, kod čistog silicijuma svaki bilioniti atom u kristalu daje jedan par slobodnih nosilaca. Zbog toga je čist silicijum veoma slab provodnik.

Ako se na krajeve silicijumskog kristala priključi napon V kao na slici:



Slika 6.4: Priključenje naponskog izvora na kristal čistog silicijuma.

onda dolazi do usmerenog kretanja slobodnih nosilaca kroz poluprovodnik. Iako se elektroni i šupljine pod dejstvom električnog polja kreću u suprotnim smerovima, pošto su oni nosioci suprotnog naelektrisanja, struje elektrona i šupljina se efektivno sabiraju. Dakle, gustina struje kroz poluprovodnik data je izrazom:

$$J = e(\mu_n n_i + \mu_p p_i)E = \sigma E \quad (6.10)$$

gde je $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C - naelektrisanje elektrona, $\mu_n = 0.135$ m²/Vs je *pokretljivost elektrona*, a $\mu_p = 0.048$ m²/Vs je *pokretljivost šupljina*. Veličine μ_n, μ_p takođe zavise od temperature. Na sobnoj temperaturi je $\sigma = 4.4 \cdot 10^{-4}$ S/m, što predstavlja slabu provodnost.

Još jedna osobina silicijuma koja je veoma korisna u mikroelektronici je da se izlaganjem silicijuma kiseoniku na povišenoj temperaturi na njegovoj površini formira oksid (SiO₂), koji je odličan izolator.

6.4 Dopiranje silicijuma primesama

Ako se u kristal silicijuma unesu primese drugih materijala, provodnost silicijuma se može povećati. Taj postupak se naziva *dopiranje* silicijuma.

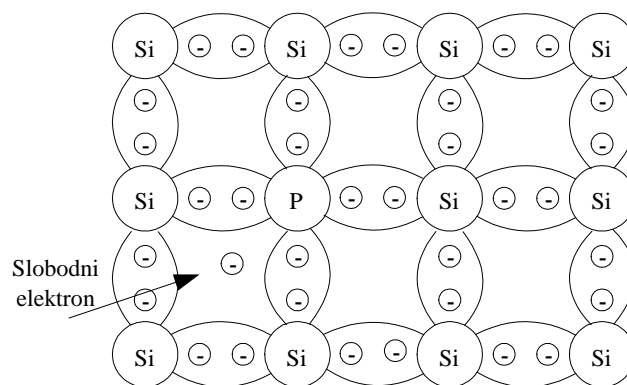
Silicijum ima 4 valentna elektrona u najvišem energetsom opsegu. Ako se silicijumu doda mala količina primesa od materijala koji ima pet valentnih elektrona (fosfor, arsen ili drugi elementi 5. grupe), pojaviće se višak slobodnih elektrona koji znatno povećava provodnost silicijuma. Takve primese se nazivaju *donorske primese* jer daju elektrone, a tako dopirani silicijum se naziva *n-tip silicijuma*, jer ima više slobodnih nosilaca negativnog naelektrisanja (elektrona) nego šupljina. Tipična koncentracija primesa je mala i iznosi oko 10^{23} atoma/ m^3 , ali je za 6 do 7 redova veličine veća od sopstvene koncentracije nosilaca. Dakle, broj slobodnih elektrona u *n-tipu silicijuma* je skoro isključivo određen koncentracijom donorskih primesa $n_{n0} = N_D$, gde je N_D koncentracija donorskih primesa.

Broj šupljina u *n-tipu silicijuma* je manji nego kod čistog silicijuma na istoj temperaturi, jer je povećana verovatnoća rekombinacije. Pošto je proizvod sopstvenih koncentracija konstantan na konstantnoj temperaturi, onda iz relacije:

$$n_{n0} p_{n0} = n_i^2 = p_i^2 \quad (6.11)$$

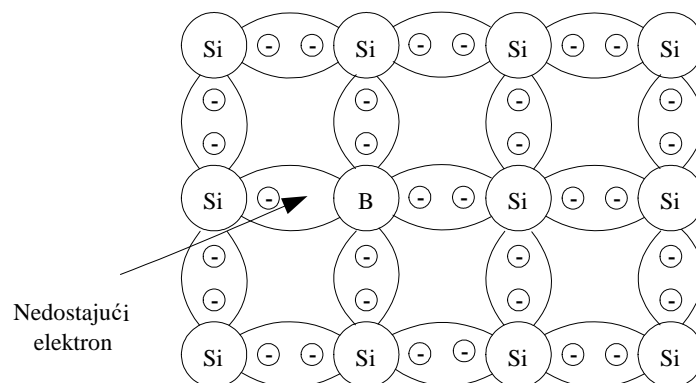
sledi

$$p_{n0} = \frac{n_i^2}{n_{n0}} = \frac{n_i^2}{N_D} \quad (6.12)$$



Slika 6.5: Kristalna rešetka silicijuma sa donorskim primesama.

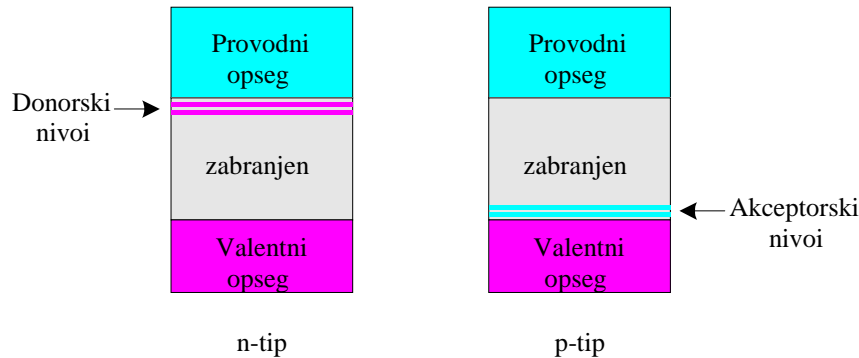
Ako se silicijumu doda mala količina primesa od materijala koji ima tri valentna elektrona (bor, indijum, ili drugi elementi 3. grupe), pojaviće se višak šupljina, koji takođe povećava provodnost silicijuma. Takve primese se nazivaju *akceptorske primese* jer privlače (primaju) slobodne elektrone, a tako dopirani silicijum se naziva *p-tip silicijuma*, jer ima više slobodnih nosilaca pozitivnog naelektrisanja (šupljina) nego elektrona.



Slika 6.6: Kristalna rešetka silicijuma sa akceptorskim primesama.

Primetimo da dodavanje primesa bilo kog tipa ne narušava neutralnost poluprovodnika, iako stvara slobodne nosioce.

Dopiranjem silicijuma menja se i struktura energetske opsega, tako što se stvaraju novi nivoi unutar zabranjene zone. Donorske primese stvaraju dodatni energetski nivo blizu nepopunjenih provodnih nivoa, čime se olakšava stvaranje slobodnih elektrona. Akceptorske primese stvaraju dodatni energetski nivo blizu popunjenih valentnih nivoa, čime se olakšava stvaranje slobodnih šupljina.



Slika 6.7: Energetski nivoi kod dopiranih poluprovodnika.

S obzirom na veliku razliku koncentracija elektrona i šupljina kod dopiranog silicijuma, provodnost dopiranog silicijuma prvenstveno određuju većinski nosioci:

$$\sigma = \begin{cases} e\mu_n n = e\mu_n N_d & \text{za } n\text{-tip silicijuma} \\ e\mu_p p = e\mu_p N_a & \text{za } p\text{-tip silicijuma} \end{cases} \quad (6.13)$$

Iako je koncentracija primesa veoma mala u odnosu na ukupni broj atoma, ona je ipak znatno veća od koncentracije slobodnih nosilaca kod čistog poluprovodnika. Provodnost je linearna funkcija koncentracije unesenih primesa. Kod materijala *n*-tipa, većinski (glavni) nosioci su elektroni, a manjinski (sporedni) nosioci su šupljine. Kod materijala *p*-tipa većinski (glavni) nosioci su šupljine, a manjinski (sporedni) nosioci su elektroni.

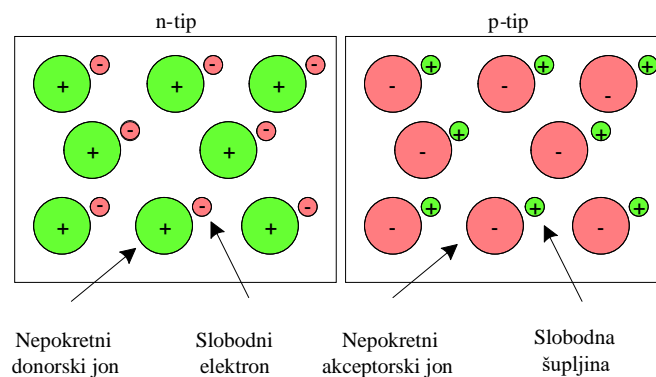
7. PN spoj

Ako se napravi bliski kontakt (spoj) materijala n -tipa i materijala p -tipa dobija se tzv. pn spoj ili *dioda*. U praksi su oba tipa materijala delovi istog kristala silicijuma, čiji su delovi dopirani različitim primesama.

Pored toga što pn spoj predstavlja diodu, on je i osnovni element složenijih elektronskih elemenata, kao što je to bipolarni tranzistor, a ima i značajnu ulogu u radu MOS tranzistora.

7.1 Nepolarisani pn spoj

Na slici 7.1 je ilustrovana situacija kada se p i n tip materijala ne dodiruju. Slobodni elektroni su ravnomerno raspoređeni po telu poluprovodnika n -tipa, dok su slobodne šupljine ravnomerno raspoređene po telu poluprovodnika p -tipa.

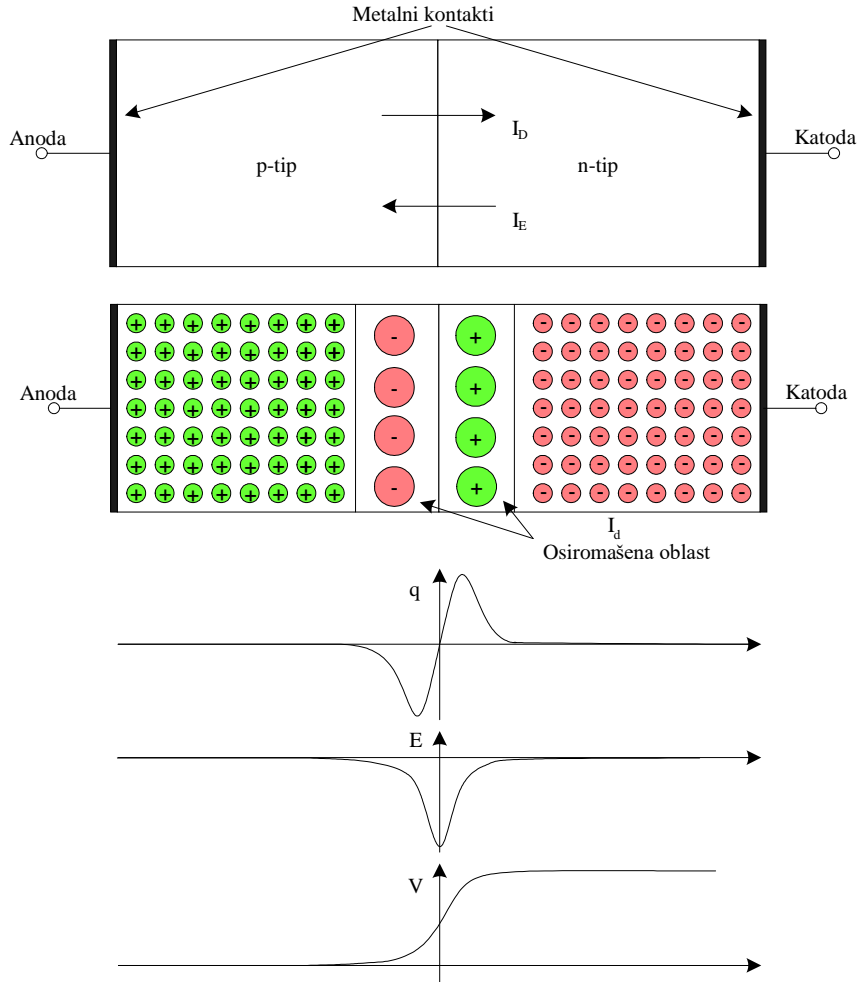


Slika 7.1: Naelektrisanja kod dopiranih poluprovodnika.

Ako se formira kontakt materijala p i n tipa, odnosno pn spoj, onda dolazi do prelaza slobodnih većinskih nosilaca preko spoja u drugu oblast i do njihove rekombinacije. U blizini spoja ostaju samo nepokretni naelektrisani atomi. Ta oblast se naziva *osiromašena oblast* ili *oblast prostornog tovara* jer u njoj nema slobodnih nosilaca elektriciteta.

Nepokretna naelektrisanja formiraju električno polje u oblasti prostornog tovara. To električno polje se suprotstavlja daljem kretanju nosilaca preko spoja. Na spoju se pojavljuje mala razlika napona, koja se naziva *potencijalna barijera*. Veličina potencijalne barijere zavisi od poluprovodničkog materijala i nivoa dopiranja primesama. Kod silicijuma potencijalna barijera je u granicama od 0.6 V do 0.8 V, a kod germanijuma svega 0.2 V. Veličina potencijalne barijere se ne može izmeriti merenjem napona između anode i katode, jer postoje i kontaktni potencijali na spojevima metal-poluprovodnik kod priključaka diode.

Dakle, možemo smatrati da kroz nepolarisani pn spoj protiču četiri različite struje. Difuzione struje većinskih nosilaca, elektrona i šupljina, potiču od različitih koncentracija nosilaca sa obe strane pn spoja i čine difuzionu struju I_D . Usled električnog polja takodje postoje dve komponente struje manjinskih nosilaca, struja elektrona i struja šupljina, koje čine struju usled električnog polja I_S . U ravnotežnom stanju, kada pn spoj nije vezan u električno kolo, ukupna struja kroz pn spoj mora biti jednaka nuli pa su difuzione struje uravnotežene strujama usled električnog polja, tj. $I_D = I_S$. Takvo ravnotežno stanje se naziva *ekvilibrijum*.



Slika 7.2: Raspodela naelektrisanja, električno polje i napon na nepolarisanom pn spoju.

Nepolarisani pn spoj se može u gruboj analogiji predstaviti kondenzatorom. Nepokretni joni predstavljaju opterećenje kondenzatorskih ploča, a osiromašena oblast predstavlja dielektrik. Ako poluprovodnik posmatramo kao celinu, on je i dalje električno neutralan.

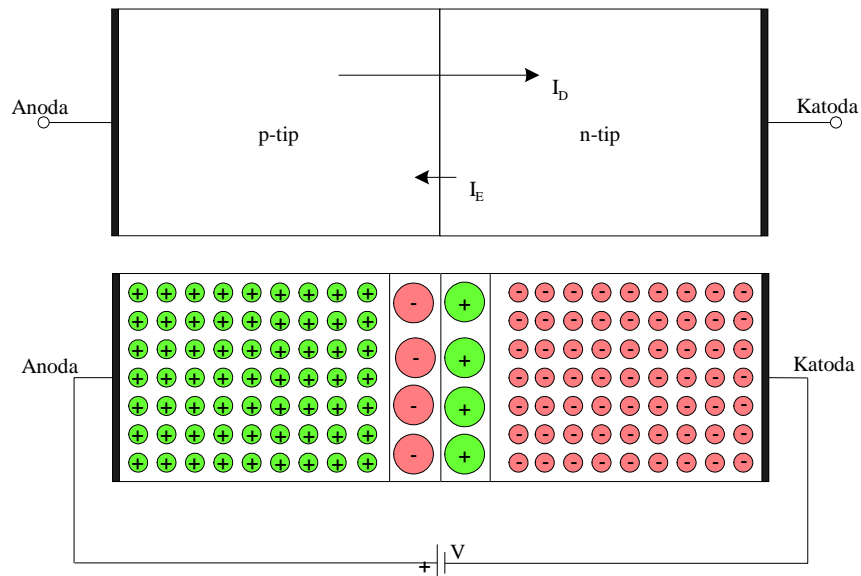
7.2 Direktno polarisani pn spoj

Ako na krajeve pn spoja povežemo naponski izvor sa pozitivnim polom vezanim na p oblast kao na slici 7.3, dolazi do smanjenja potencijalne barijere na spoju, suženja oblasti prostornog tovara i olakšanog kretanja većinskih nosilaca preko spoja. Većinski nosioci iz n oblasti, elektroni, difuzijom prelaze u p oblast, a većinski nosioci iz p oblasti, šupljine, difuzijom prelaze u n oblast, gde dolazi do njihove rekombinacije. Dakle, pošto je električno kolo zatvoreno, postoji stalna difuzija nosilaca preko spoja, odnosno postoji struja kroz pn spoj. Manjinski nosioci takođe prelaze preko spoja usled električnog polja, ali je zbog njihovog znatno manjeg broja njihov doprinos ukupnoj struji zanemarljiv.

Dakle, struja kroz direktno polarisanu diodu se sastoji od dve komponente: struje većinskih nosilaca (difuziona struja) i struje manjinskih nosilaca (struja usled električnog polja).

$$I = I_D - I_E = Ke^{-e(V_0 - V)/kT} - Ke^{-eV_0/kT} = I_S (e^{eV/kT} - 1) = I_S (e^{V/V_T} - 1) \approx I_S e^{V/V_T} \quad (7.1)$$

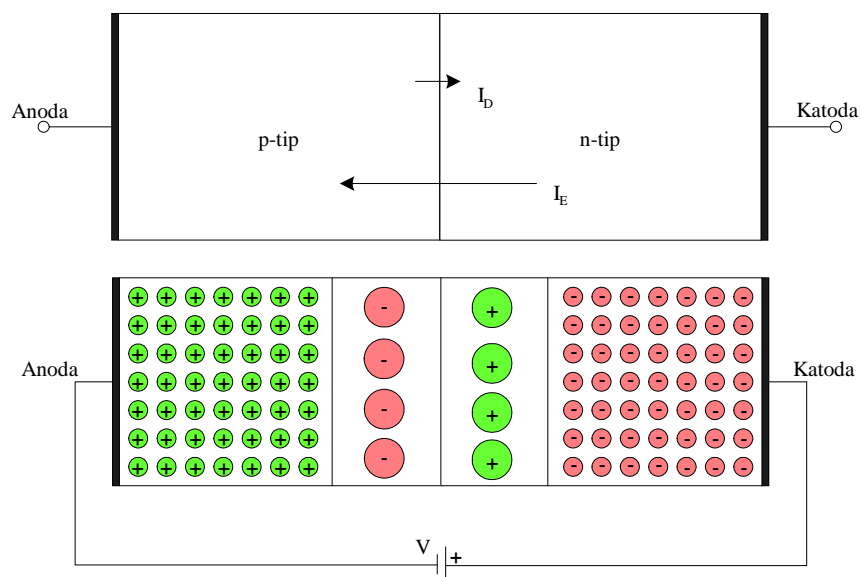
gde je K konstanta koja zavisi od geometrijskih dimenzija pn spoja, V napon na spoju, V_0 napon potencijalne barijere, k Bolcmanova konstanta, a T apsolutna temperatura u $^{\circ}\text{K}$. Struja I_S se naziva *inverzna struja zasićenja* pn spoja i direktno je proporcionalna površini pn spoja. Kod silicijuma ona iznosi oko 10^{-15} A, dok je kod germanijuma oko 10^{-6} A na sobnoj temperaturi. Napon $V_T = kT/e$ se naziva *temperaturni napon* i na sobnoj temperaturi iznosi približno 26 mV.



Slika 7.3: Struje i raspodela naelektrisanja na direktno polarisanom pn spoju.

7.3 Inverzno polarisani pn spoj

Ako na pn spoj povežemo naponski izvor sa pozitivnim polom vezanim na n oblast, kao na slici 7.4, dolazi do povećanja potencijalne barijere na spoju, proširenja oblasti prostornog tovara i otežanog kretanja većinskih nosilaca preko spoja. Struja manjinskih nosilaca ostaje skoro nepromenjena i ona predstavlja struju kroz spoj.



Slika 7.4: Struje i raspodela naelektrisanja na inverzno polarisanom pn spoju.

$$I = I_D - I_E \approx -I_S \quad (7.2)$$

Iako teorijski model pokazuje da je struja inverzno polarisanog *pn* spoja jednaka struji zasićenja, eksperimentalno se dobijaju veće vrednosti za struju inverzno polarisanog *pn* spoja. Razlog za to su površinski efekti koji izazivaju tzv. *struju curenja*, koja može biti i milion puta veća od struje zasićenja.

7.4 Proboj *pn* spoja i Zener dioda

Ako se na *pn* spoj primeni veliki inverzni napon, dolazi do formiranja jakog električnog polja u oblasti prostornog tovara i do naglog porasta struje. Ta pojava se naziva *proboj*, a napon pri kome dolazi do proboja se naziva *napon proboja*. Veličina napona proboja uglavnom zavisi od koncentracije primesa.

Kod silicijumskih dioda razlikuju se dve vrste mehanizma proboja. Kod intenzivno dopiranih *pn* spojeva dominantno nastaje *Zenerov proboj*, i on se javlja zahvaljujući tunnel efektu. Kod slabo dopiranih *pn* spojeva, dominantno se javlja *lavinski proboj* i on nastaje udarnom jonizacijom koju vrše nosioci sa velikom kinetičkom energijom. U mnogim slučajevima su zastupljena oba mehanizma proboja. Opisani proboji sami po sebi nisu destruktivni ukoliko je snaga disipacije (proizvod struje i napona) na diodi takva da ne dođe do pregrevanja i spaljivanja.

Kod standardnih dioda proboj je uglavnom destruktivnog karaktera jer se dešava pri velikom inverznom naponu. Pri tome struja nekontrolisano kreće da raste, pa snaga disipacije lako pregreje diodu. Međutim, postoje diode koje su posebnim tehnološkim postupkom tako fabrikovane da kod njih postoji ograničenje disipacije pa proboj nije destruktivan. Bez obzira koji je mehanizam proboja u pitanju takve diode se nazivaju Zenerove diode.

Zenerove diode imaju veliku praktičnu primenu. Zbog vrlo naglog porasta struje prilikom proboja, napon na Zener diodi u oblasti proboja je praktično konstantan. Iz tog razloga se Zenerove diode intenzivno koriste u stabilizatorima napona i naponskim referentnim izvorima.

7.5 Strujno naponska karakteristika i modeli diode

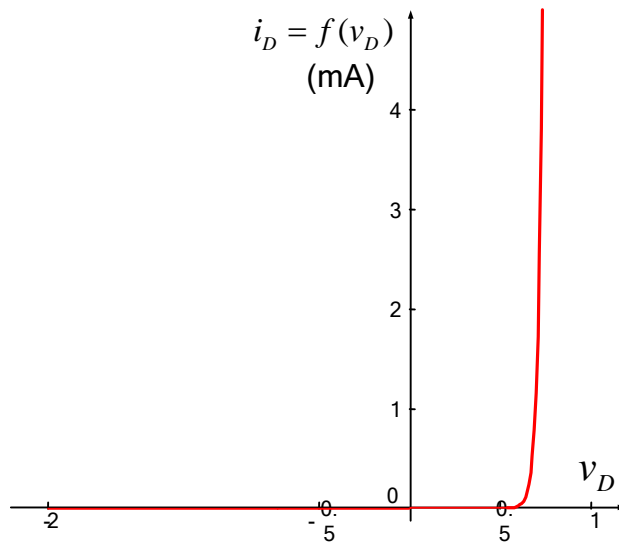
Za poluprovodničku diodu se koristi isti simbol i ista nomenklatura kao i za idealnu diodu. Pri tome se poluprovodnička dioda modeluje na više načina u zavisnosti od nivoa aproksimacije. Najveći nivo aproksimacije poluprovodničke diode upravo idealna dioda.

7.5.1 Nelinearni model diode

Kao što je objašnjeno u prethodnom izlaganju, pod uslovom da se ne nalazi u oblasti proboja, struja diode pri direktnoj ili inverznoj polarizaciji se može opisati relacijom

$$i_D = I_S (e^{v_D/V_T} - 1) \quad (7.3)$$

Ista nomenklatura važi kao za idealnu diodu. Izraz 7.3 je funkcionalna zavisnost koja se naziva statička strujno-naponska karakteristika diode i grafički je predstavljena na slici 7.5.

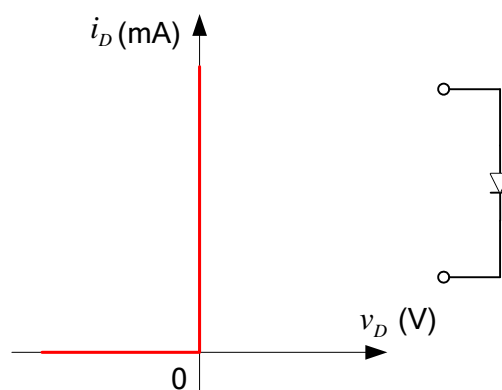


Slika 7.5: Grafički prikaz jednačine diode.

Relacija 7.3 je nelinearna i često postoji potreba da bude uprošćena, odnosno linearizovana. U praksi je razvijeno nekoliko uprošćenih modela diode, pogodnih za izračunavanja bez upotrebe računara.

7.5.2 Idealna dioda

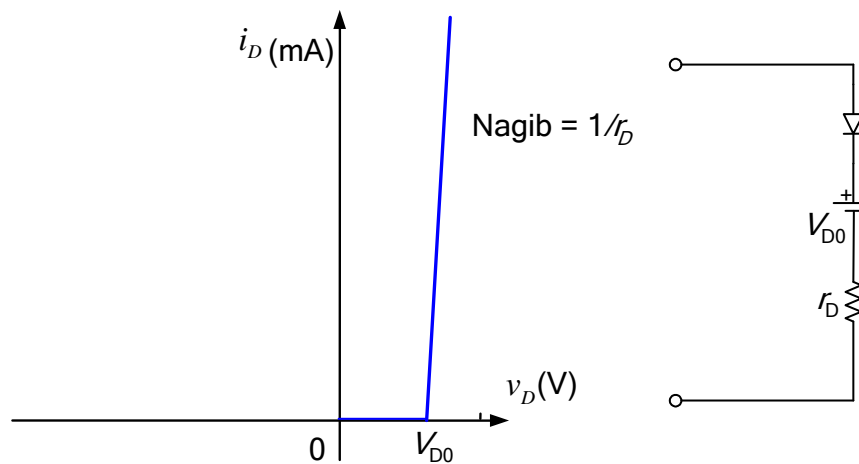
Idealna dioda predstavlja najjednostavniji model diode. Ako je dioda direktno polarisana, uzima se da je napon na njoj nula. Ako je dioda inverzno polarisana uzima se da je struja kroz nju nula. Dakle, direktno polarisana dioda približno odgovara kratkom spoju, dok inverzno polarisana dioda predstavlja otvorenu vezu. To je grafički predstavljeno na slici 7.6.



Slika 7.6: Karakteristika idealne diode i njen simbol.

7.5.3 Izlomljeni linearni model diode

Izlomljeno linearni model diode je zasnovan na jednostavnoj linearizaciji nelinearne karakteristike diode, koja je prikazana na slici 7.7a.

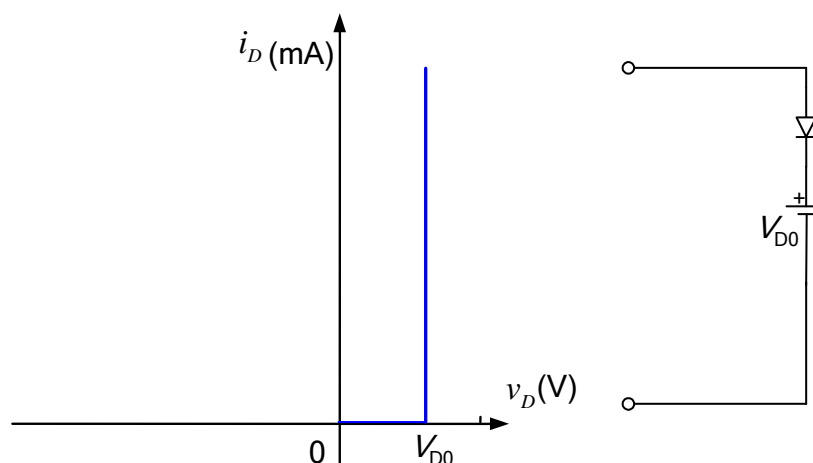


Slika 7.7: (a) Izlomljeno linearna aproksimacija karakteristike diode, (b) Električni model.

Električni model kojim se realizuje ovakva karakteristika prikazan je na slici 7.7b. Parametri modela su $V_{D0} \approx 0.65 \text{ V}$ i $r_D \approx 20 \Omega$. U model je uključena i idealna dioda da bi se obezbedilo da struja teče samo pri direktnoj polarizaciji diode. Ukoliko se modeluju diode kod kojih su spojevi bazirani na materijalima različitim od silicijuma, na primer germanijumska ili Šotki dioda, pad napona V_{D0} može da bude i reda $0.2 \text{ V} - 0.3 \text{ V}$.

7.5.4 Model diode sa konstantnim padom napona

Najčešće korišćeni model diode u praktičnim izračunavanjima dobija se uprošćenjem izlomljeno linearnog modela, tako što se stavi da $r_D \rightarrow 0 \Omega$. Onda drugi segment izlomljeno linearne karakteristike postaje vertikalalan, kao na slici 7.8a. Najčešće se uzima da je $V_{D0} = 0.7 \text{ V}$.



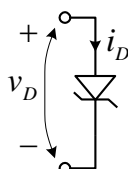
Slika 7.8: (a) Aproksimacija karakteristike diode sa konstantnim padom napona, (b) Električni model.

Ovaj model diode može i da se opiše jednostavnim skupom matematičkih iskaza:

$$\begin{aligned}
 i_D &= 0 \quad \text{za } v_D < V_{D0}; \\
 v_D &= V_{D0} \quad \text{za } i_D > 0.
 \end{aligned}
 \tag{7.4}$$

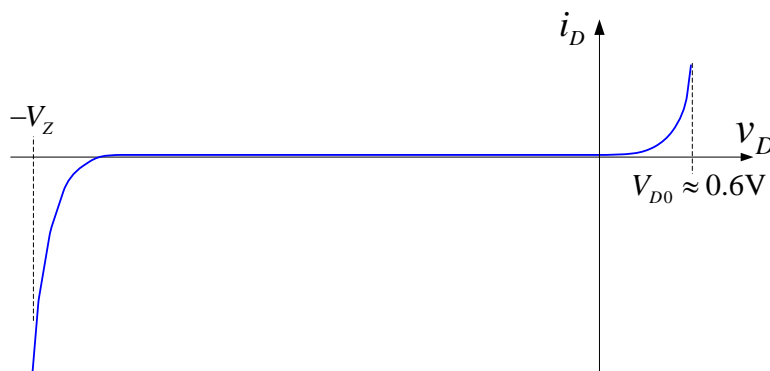
7.5.5 Karakteristika Zenerove diode i modelovanje

Zenerova dioda ima sličan simbol kao i obična dioda, slika 7.9. Referentni smerovi za napon i struju su identični kao u slučaju obične diode:



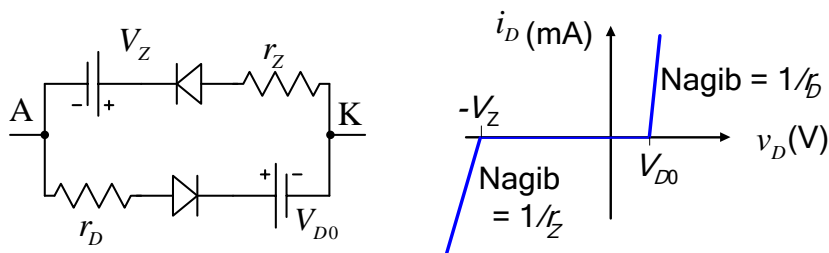
Slika 7.9. Električni simbol Zenerove diode sa usaglašenim smerovima struje i napona

Matematički opis zavisnosti struje Zenerove diode i_D od napona v_D složeniji je u odnosu na formulu 7.3 jer je potrebno modelovati ponašanje i u oblasti proboja, stoga ga ovde nećemo navoditi. Na slici 7.10 ilustrovana je strujno naponska karakteristika jedne Zenerove diode koja ilustruje ponašanje i u oblasti proboja:



Slika 7.7.10 strujno naponska karakteristika Zenerove diode koja ilustruje ponašanje i u oblasti proboja:

Za potrebe analize i dizajna električnih kola koje sadrže Zenerove diode, najčešće se koristi model u kome se redno sa idealnim diodama dodaju padovi napona u direktnoj polarizaciji, kao i redne otpornosti. Model takve diode je prikazan na slici 7.11, kao i njena strujno naponska karakteristika



slika 7.11 Model koji se najčešće koristi i u kome je dioda i u direktnom i u inverznom režimu modelovana konstantnim padom napona

7.5.6 Model diode za male signale

Pretpostavimo da se napon na direktno polarisanoj diodi sastoji od fiksno delata i promenljivog delata, koje ćemo označiti po sledećoj konvenciji:

$$v_D = V_D + v_d, \text{ gde je } v_d \ll V_T \quad (7.5)$$

Pošto je varijacija napona na diodi mala, za struju diode se može pisati:

$$\begin{aligned} i_D &= I_S e^{v_D/V_T} = I_S e^{(V_D+v_d)/V_T} = I_S e^{V_D/V_T} e^{v_d/V_T} = I_D e^{v_d/V_T} \\ &\approx I_D \left(1 + \frac{v_d}{V_T}\right) = I_D + \frac{I_D}{V_T} v_d = I_D + \frac{1}{r_d} v_d = I_D + i_d \end{aligned} \quad (7.6)$$

Dakle za promenljivu komponentu struje diode važi jednačina:

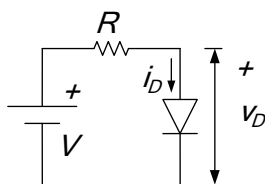
$$i_d = \frac{1}{r_d} v_d \quad (7.7)$$

gde se r_d naziva *otpornost diode za male signale*. Recipročna vrednost otpornosti diode za male signale predstavlja nagib tangente karakteristike diode u tački koja je određena fiksnim delovima napona i struje diode.

Dakle, za male signale dioda se može modelovati otpornikom, čija je vrednost jednaka otpornosti diode za male signale r_d .

7.6 Radna tačka diode

Posmatrajmo jednostavno kolo sa diodom, kao na slici 7.12:



Slika 7.12: Elementarno kolo sa diodom.

Kako odrediti struju i napon na diodi, kada su vrednosti napona baterije V i otpornika R poznate? Dioda je direktno polarisana i kroz nju teče značajna struja. Mogu se napisati dve jednačine. Jedna od njih je nelinearna jednačina diode:

$$I_D = I_S e^{V_D/V_T} \quad (7.8)$$

dok je druga jednačina po drugom Kirhofovom zakonu linearna:

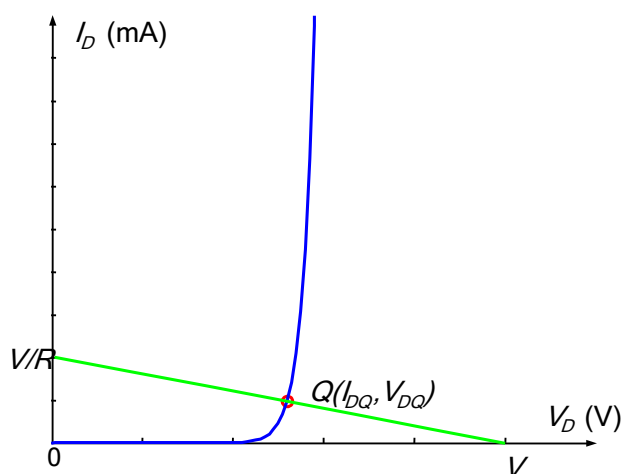
$$V - RI_D - V_D = 0 \quad (7.9)$$

Iz druge jednačine se dobija jednačina prave u sistemu (I_D, V_D) :

$$I_D = -\frac{1}{R}V_D + \frac{1}{R}V \quad (7.10)$$

koja se naziva *radna prava*.

Obe jednačine se mogu predstaviti grafički, kao na slici 7.10, pa se i do rešenja sistema jednačina može doći grafičkim putem. Rešenje sistema jednačina je presek jednačine diode i radne prave definisane drugim Kirhofovom zakonom i naziva se *mirna radna tačka*.



Slika 7.13: Jednačina diode i radna prava u istom sistemu karakteristika.

Drugi način određivanja radne tačke je da se reši sistem od jedne linearne i jedne nelinearne jednačine nekim metodom rešavanja nelinearnih jednačina iz numeričke analize. Najčešće se rešavanje nelinearne jednačine, ili sistema nelinearnih jednačina, svodi na iterativno rešavanje sistema linearnih jednačina. Ovaj metod rešavanja nelinearnih kola se koristi u računarskim programima za analizu kola, kao što je, na primer, poznati program SPICE.

7.7 Primene i vrste dioda

Kao što se vidi iz jednačine za struju diode (7.1), osobine diode znatno zavise od:

- Materijala od kojeg je napravljena dioda,
- Geometrijskih karakteristika spoja,
- Temperature.

Diode su važan i često korišćeni element u savremenoj elektronici. Pošto se dioda ne može realizovati tako da se istovremeno ostvare sve povoljne karakteristike, diode se proizvode sa karakteristikama koje najviše odgovaraju njihovoj nameni. Tako se kod proizvođača poluprovodničkih komponenata mogu nabaviti razne vrste dioda, kao što su:

- Diode za usmerače malih snaga,

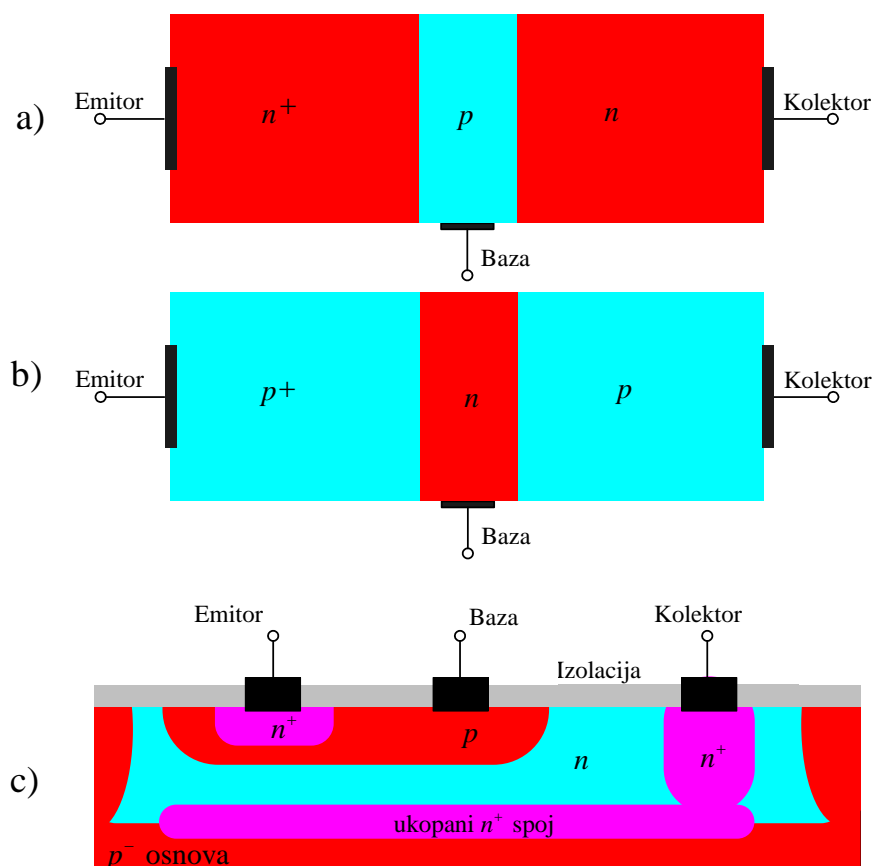
- Diode za usmerače velikih snaga,
- Diode za prekidački režim rada
- Diode za rad na visokim učestanostima,
- Diode promenljive kapacitivnosti (varikap ili varaktor diode),
- Fotodiode,
- Svetleće (LED) diode, itd.

Detalnije karakteristike dioda se mogu naći u publikacijama proizvođača (data sheet), u papirnoj formi (katalozi) ili na Internetu.

8 Bipolarni tranzistor (Bipolar Junction Transistor - BJT)

8.1 Struktura i simboli bipolarnog tranzistora

Bipolarni tranzistor je poluprovodnička struktura sa tri elektrode. Bipolarni tranzistor predstavlja sendvič strukturu sačinjenu od tri različito dopirane poluprovodničke oblasti koje formiraju dva pn spoja: nnp ili pnp . Najviše dopirana oblast predstavlja *emitor*, središnja oblast se naziva *baza*, dok je najmanje dopirana oblast *kolektora*. Radi korektnog funkcionisanja tranzistora, *baza mora biti vrlo uska*, a sve tri oblasti imaju metalne kontakte kojima se vrši priključivanje tranzistora u električnokolo. U praksi se, zbog boljih električnih karakteristika, mnogo više koriste nnp tranzistori pa će se analiza rada tranzistora uglavnom ilustrovati preko nnp tranzistora.

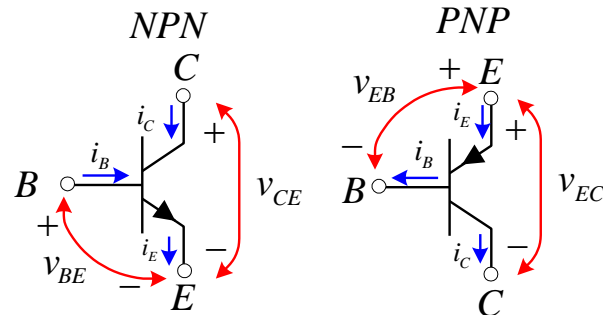


Slika 8.1: Principijelni prikaz strukture bipolarnog a) nnp i b) pnp tranzistora. Znak plus označava veću koncentraciju slobodnih nosilaca, što znači da postoji razlika u koncentracijama nosilaca između emitorskog i kolektorskog dela tranzistora. c) Uprošćeni prikaz poprečnog preseka vertikalnog nnp tranzistora

Na slici 8.2 prikazani su električni simboli nnp i pnp tranzistora, sa označenim referentnim smerovima odgovarajućih napona i struja. Ukoliko je ispunjeno da su prikazani naponi na slici 8.2 veći od nule,

$$\begin{aligned} v_{CE} > 0, v_{BE} > 0, \text{ za } npn \text{ i} \\ v_{EC} > 0, v_{EB} > 0 \text{ za } pnp \end{aligned} \quad (8.1)$$

tada se kaže da je tranzistor u *direktnom* režimu, i struje na slici 8.2 su veće ili jednake nuli. Bipolarni tranzistor može da radi i kad kolektor i emitor zamene mesta i tada radi u *inverznom* režimu. Iako je moguće sintetizovati šeme sa tranzistorima u inverznom režimu rada, ta varijanta se u praksi retko koristi i zbog toga nije obrađena u ovoj knjizi. Pošto se direktan režim podrazumeva, u tekstu koji sledi neće se više naglašavati da se o njemu radi.



Slika 8.2: Simboli npn i pnp tranzistora

Zavisno od polarizacije spojeva emitor-baza (emitorski spoj) i kolektor-baza (kolektorski spoj), *npn* tranzistor se može naći u različitim režimima rada, koji su prikazani u sledećoj tabeli:

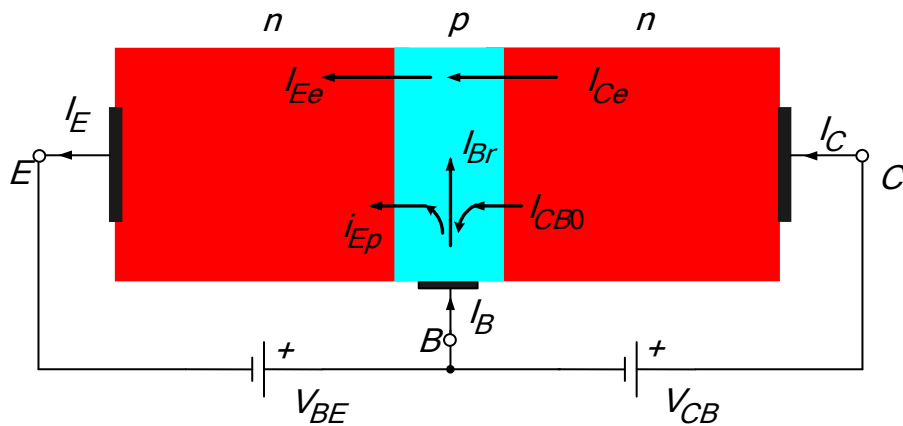
Režimi rada tranzistora

Tip	Režim rada	Potencijali priključaka	Tip spoja		Namena
			Emitor-baza	Kolektor-baza	
<i>npn</i>	Direktan aktivni režim	$E < B < C$	Direktna polarizacija	Inverzna polarizacija	Pojačavači
	Zasićenje	$E < B > C$	Direktna polarizacija	Direktna polarizacija	Prekidači
	Zakočenje	$E > B < C$	Inverzna polarizacija	Inverzna polarizacija	Prekidači
	Inverzan aktivan režim	$E > B > C$	Inverzna polarizacija	Direktna polarizacija	Retko se koristi
<i>pnp</i>	Inverzan aktivan režim	$E < B < C$	Inverzna polarizacija	Direktna polarizacija	Retko se koristi
	Zakočenje	$E < B > C$	Inverzna polarizacija	Inverzna polarizacija	Prekidači
	Zasićenje	$E > B < C$	Direktna polarizacija	Direktna polarizacija	Prekidači
	Direktan aktivni režim	$E > B > C$	Direktna polarizacija	Inverzna polarizacija	Pojačavači

Aktivni režim se dominantno koristi u pojačavačkim kolima, koja se proučavaju u analognoj elektronici. Režimi zasićenja i zakočenja se dominantno koriste u elektronskim prekidačima i proučavaju se u impulsnoj i digitalnoj elektronici.

8.2 Rad bipolarnog tranzistora u aktivnom režimu i zasićenju

U aktivnom režimu rada emitorski spoj je direktno polarisan, a kolektorski spoj je inverzno polarisan. Polarizacija se ostvaruje priključivanjem baterija odgovarajućeg polariteta, kao na slici 8.3.



Slika 8.3: Struje u aktivnom režimu rada npn tranzistora

Za razmatranje rada tranzistora u aktivnom režimu najbolje je poći od emitorskog spoja koji je direktno polarisan, i prema tome ima dve difuzione struje većinskih nosilaca sa obe strane spoja:

1. Struja elektrona od emitora ka bazi I_{Ee}
2. Struja šupljina od baze ka emitoru I_{Ep}

čiji zbir predstavlja struju emitora:

$$I_E = I_{Ee} + I_{Ep} \approx I_{Ee}, \quad \text{jer je } I_{Ep} \ll I_{Ee} \quad (8.2)$$

Elektroni koji su iz emitora prešli u bazu u njoj predstavljaju manjinske nosioce. Pre uspostavljanja direktne polarizacije emitorskog spoja i ubacivanja elektrona, ravnotežna koncentracija elektrona u bazi je bila veoma mala. Ubačeni elektroni znatno povećavaju koncentraciju elektrona u bazi naročito u blizini emitorskog spoja. S druge strane, kolektorski spoj je inverzno polarisan pa električno polje izaziva kretanje manjinskih nosilaca preko spoja. Zbog toga je u blizini kolektorskog spoja koncentracija manjinskih nosilaca (elektrona u bazi i šupljina u kolektoru) izuzetno mala. Dakle, koncentracija elektrona u bazi opada sa velike vrednosti oko emitorskog spoja na malu vrednost oko kolektorskog spoja. Pošto je baza veoma uska, može se opravdano smatrati da je koncentracija elektrona opada po linearnom zakonu. Kao posledica neuniformne koncentracije, elektroni u bazi se kreću difuzijom od emitorskog ka kolektorskom spoju. S obzirom da u bazi postoje i šupljine, izvestan broj elektrona se na svom putu od emitorskog ka kolektorskom spoju rekombinuje i ne stigne do kolektora. S obzirom na malu širinu baze, broj rekombinovanih elektrona je mali.

Na inverzno polarisanom kolektorskom spoju postoje dve komponente struje manjinskih nosilaca usled električnog polja:

1. Struja elektrona od baze ka kolektoru I_{Ce}
2. Struja šupljina od kolektora ka bazi I_{CBo} (inverzna struja zasićenja spoja CB) .

Te dve struje u zbiru daju struju kolektora:

$$I_C = I_{Ce} + I_{CB0} \approx I_{Ce}, \text{ jer je } I_{CB0} \ll I_{Ce}. \quad (8.3)$$

Struja baze se sastoji od tri komponente:

1. Struja šupljina od baze ka emitoru I_{Ep}
2. Struja šupljina od kolektora ka bazi I_{CB0}
3. Struja usled rekombinacije elektrona u bazi I_{Br}

tako da je:

$$I_B = I_{Br} + I_{Ep} - I_{CB0} \quad (8.4)$$

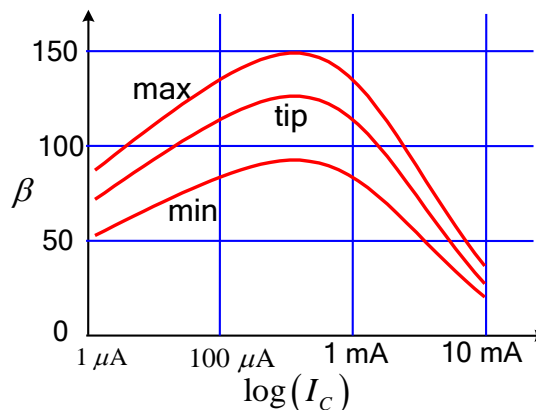
Odnos struje elektrona koji prelaze u kolektor i struje emitora obeležava se sa α i naziva *koeficijent strujnog pojačanja od emitora do kolektora*:

$$\alpha = \frac{I_{Ce}}{I_E} = \frac{I_C - I_{CB0}}{I_E} \approx \frac{I_C}{I_E} \quad (8.5)$$

odakle se uz pomoć prvog Kirhofovog zakona i jednačine $I_E = I_B + I_C$ dobija:

$$I_C = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_B + \frac{1}{1-\alpha} I_{CB0} = \beta I_B + (\beta+1) I_{CB0} \approx \beta I_B \quad (8.6)$$

Faktor β se naziva koeficijent strujnog pojačanja (od baze do kolektora). Tipične vrednosti za faktor α su od 0.95 do 0.999, a za faktor β od 20 do 1000. Treba napomenuti da koeficijent strujnog pojačanja nije konstanta i da zavisi od temperature (min, tip, max) i struje kolektora, slika 8.4. Za svaki tip tranzistora proizvođač kao kataloški podatak daje familiju krivih koja opisuje zavisnost koeficijenta strujnog pojačanja od struje kolektora. Prilikom analize tranzistorskih kola, uobičajeno je da se koeficijent strujnog pojačanja smatra konstantnim, što će u tekstu koji sledi biti razjašnjeno.



Slika 8.4. Zavisnost koeficijenta β od struje kolektora

U literaturi koja detaljno objašnjava režime rada bipolarnog tranzistora koeficijenti α i β često imaju u indeksu F , na primer β_F , da bi se naglasilo da se radi o direktnom režimu, dok se za inverzni režim koristi β_R sa slovom R u indeksu. Pri tome je $\beta_F \gg \beta_R$.

Relacija $I_C \approx \beta I_B$ pokazuje suštinu rada tranzistora, koja se ogleda u činjenici da se *malom strujom baze može kontrolisati znatno veća kolektorska struja*.

Pošto je struja baze eksponencijalnog karaktera:

$$I_B = I_{BS} e^{V_{BE}/V_T} \quad (8.7)$$

onda i kolektorska struja sledi istu zavisnost:

$$I_C = \beta I_B = \beta I_{BS} e^{V_{BE}/V_T} = I_{CS} e^{V_{BE}/V_T} \quad (8.8)$$

Struja I_{CS} se zove inverzna struja zasićenja tranzistora i uobičajeno je da se označava samo sa I_S . Za struju I_S se može pokazati da dominantno zavisi od sledećih tehnoloških parametara:

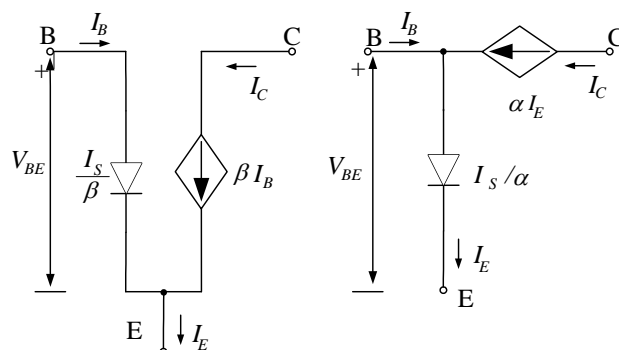
$$I_S = q n_{p0} A_E \frac{D_n}{W_B}, \quad (8.9)$$

pri čemu je značenje pojedinih parametara već delimično objašnjeno i u poglavlju 7. Prethodno izvedene formule važe kako za DC signale tako i za trenutne vrednosti signala na nižim učestanostima. Formula 8.8 i napisana u izmenjenom obliku glasi:

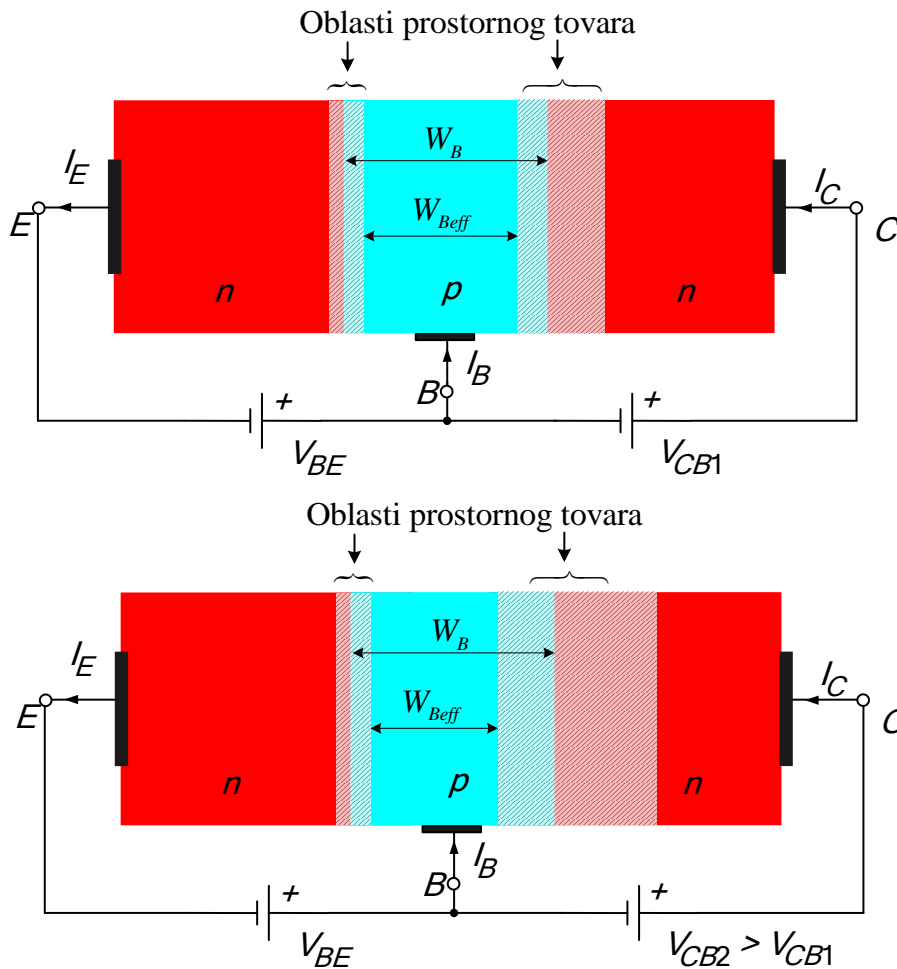
$$i_C = I_S e^{v_{BE}/V_T} = q n_{p0} A_E \frac{D_n}{W_B} e^{v_{BE}/V_T}. \quad (8.10)$$

- n_{p0} – ravnotežna koncentracija sporednih nosilaca (elektrona) u području baze (slučaj *npn* tranzistora)
- D_n – difuziona konstanta sporednih nosilaca (elektrona) u području baze
- q – naelektrisanje elektrona
- A_E – površina emitora
- W_B – geometrijska širina baze
- i_C, v_{BE} , trenutne vrednosti struje kolektora i napona spoja baza-emitor

Koristeći prethodne relacije, najprostiji modeli *npn* bipolarnog tranzistora u aktivnom režimu mogu se napraviti korišćenjem kontrolisanih strujnih izvora. Dva takva modela su prikazana na slici 8.5:



Slika 8.5. Modeli *npn* tranzistora za velike signale u aktivnom režimu rada.



Slika 8.6. Ilustracija promene efektivne širine baze koja nastaje kao posledica povećanja napona inverzne polarizacije pn spoja baza-kolektor i proširenja oblasti prostornog tovara

8.2.2 Erlijev efekat

Erlijev efekat se može uočiti na grafiku zavisnosti kolektorske struje i_C od napona v_{CE} kada se bazna struja koristi kao parametar. Na tom grafiku se može uočiti porast struje i_C s porastom napona v_{CE} , kao što je prikazano na slici 8.15. Erlijev napon $-V_A$, dobija se na mestu preseka V_{CE} ose sa linijama koje predstavljaju produženje funkcija $i_C(v_{CE})$.

Kao što je već rečeno, kod tranzistora u aktivnom režimu pn spoj baza–emitor je direktno polarizovan dok je spoj baza–kolektor inverzno polarizovan. Kako je napon između baze i emitora približno 0.7 V i slabo se menja dok je tranzistor u aktivnom režimu, povećanje napona v_{CE} dominantno će da se translira u povećanje napona v_{CB} , što je istovremeno i povećan napon inverzne polarizacije pn spoja baza – kolektor. Shodno razmatranjima u poglavljima 7.2 i 7.3, povećan napon inverzne polarizacije pn spoja baza – kolektor automatski povlači proširenje oblasti prostornog tovara na granici spoja baza – kolektor, što prouzrokuje smanjenje efektivne širine baze, slika 8.6. Stoga je efektivna širina baze funkcija napona v_{CE} a samim tim i inverzna struja zasićenja, jer je u izrazu 8.9 potrebno koristiti efektivnu širinu baze umesto geometrijske širine baze. Opisani efekat se naziva Erlijev efekat.

Uticaj promene napona v_{CE} na promenu struje i_C u izrazu 8.10, može se izraziti posredno preko promene efektivne širine baze, diferenciranjem izraza:

$$\frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} = -\frac{i_C}{W_B} \frac{dW_B}{dv_{CE}} \quad (8.11)$$

Može se pokazati da se izraz

$$V_A = -W_B / \frac{dW_B}{dv_{CE}} \quad (8.12)$$

malo menja sa promenom napona v_{CE} pa se može smatrati konstantnim. Izraz je po dimenziji napon i naziva se Erlijev napon i pozitivan je. U praksi se tretira kao kataloški parametar koji proizvođač tranzistora publikuje u specifikacijama tranzistora. Koristeći izraz 8.12 formula 8.11 se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} = \frac{i_C}{V_A} \quad (8.13)$$

Uzimanjem u obzir Erlijevo efekta jednačine koje opisuju struju kolektora tranzistora u aktivnom režimu dobijaju modifikovan oblik:

$$i_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} \left(1 + \frac{v_{CE}}{V_A} \right), \quad (8.14)$$

$$i_C = \beta i_B \left(1 + \frac{v_{CE}}{V_A} \right). \quad (8.15)$$

Erlijev napon kod diskretnih tranzistora ima vrednost reda ~ 100 V. Ukoliko se eksplicitno ne kaže suprotno, u analizama koje ćemo da sprovodimo u tekstu koji sledi, Erlijev efekat će biti zanemaren.

8.2.3 Model tranzistora za male signale

Pretpostavimo da se pobudni napon tranzistora sastoji od fiksne (DC) komponente i promenljive (AC) komponente, koje ćemo označiti po sledećoj konvenciji:

$$v_{BE}(t) = V_{BE} + v_{be}(t), \quad (8.16)$$

gde je $v_{be} \ll V_T$, za svako t u intervalu posmatranja. Argument t se u daljem tekstu podrazumeva. Pošto je varijacija pobudnog napona mala, onda se za struju baze može pisati:

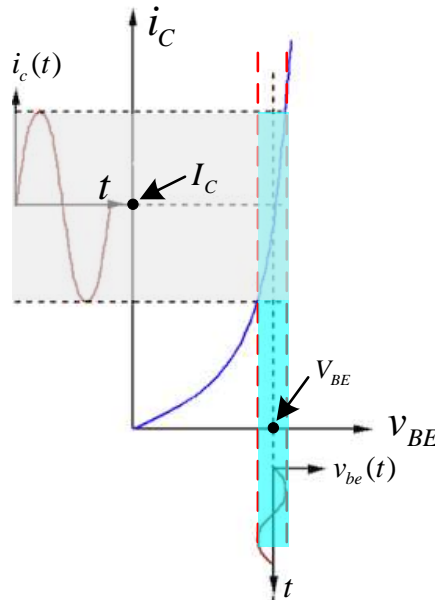
$$\begin{aligned} i_B &= I_{BS} e^{v_{BE}/V_T} = I_{BS} e^{(V_{BE} + v_{be})/V_T} = I_{BS} e^{V_{BE}/V_T} e^{v_{be}/V_T} \\ &= I_B e^{v_{be}/V_T} \approx I_B \left(1 + \frac{v_{be}}{V_T} \right) = I_B + \frac{I_B}{V_T} v_{be} = I_B + \frac{1}{r_\pi} v_{be} = I_B + i_b \end{aligned} \quad (8.17)$$

odnosno, ona se sastoji od fiksne DC i promenljive AC komponente. DC komponenta ulaznog napona određuje DC komponentu struje baze, tj. određuje *mirnu radnu tačku* MRT. Promenljiva komponenta ulaznog napona određuje promene struje baze oko MRT. Parametar $r_\pi = V_T / I_B$ očigledno zavisi od radne tačke tranzistora.

Na sličan način se za struju kolektora dobija:

$$\begin{aligned} i_C &= \beta_0 \cdot i_B = I_S e^{v_{BE}/V_T} = I_S e^{(V_{BE} + v_{be})/V_T} = I_S e^{V_{BE}/V_T} e^{v_{be}/V_T} \\ &= I_S e^{v_{be}/V_T} \approx I_C \left(1 + \frac{v_{be}}{V_T}\right) = I_C + \frac{I_C}{V_T} v_{be} = I_C + g_m v_{be} = I_C + i_c, \end{aligned} \quad (8.18)$$

tj. i ona se sastoji od fiksne i promenljive komponente. Koeficijent strujnog pojačanja β_0 koji figuriše u jednačini 8.18 generalno se po vrednosti razlikuje od koeficijenta strujnog pojačanja za veliki signal ali se aproksimativno mogu smatrati jednakim, tako da će u daljem tekstu biti izostavljen indeks nula. Fiksna komponenta ulaznog napona V_{BE} određuje fiksnu komponentu kolektorske struje I_C , a promenljiva komponenta ulaznog napona v_{be} određuje promene kolektorske struje i_c , u okolini MRT, slika 8.7. U ovom slučaju MRT je definisana uređenim parom $Q = (V_{BE}, I_C)$. U složenijim šemama, u kojima figuriše više jednosmernih signala, da bi se istaklo da se radi o signalima mirne radne tačke, često se u indeksu dodaje i slovo Q , pa se piše $Q = (V_{BEQ}, I_{CQ})$.



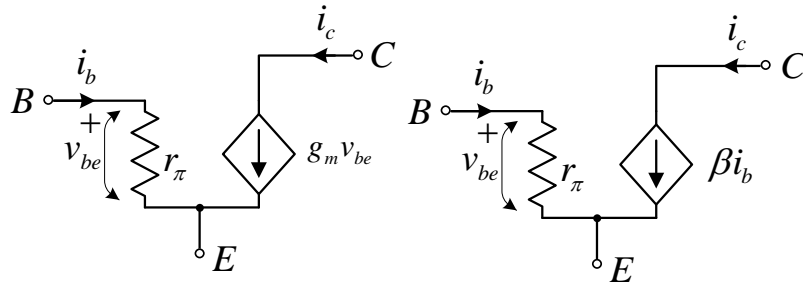
Slika 8.7 Fiksna komponenta ulaznog napona V_{BE} određuje fiksnu komponentu kolektorske struje I_C , a promenljiva komponenta ulaznog napona v_{be} određuje promene kolektorske struje i_c , u okolini MRT.

Parametar $g_m = I_C/V_T$ naziva se *transkonduktansa* tranzistora. Očigledno, postoji veza:

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{\beta I_B}{V_T} = \frac{\beta}{r_\pi} = \frac{1}{r_e} \quad (8.19)$$

gde se $r_e = v_{be}/i_b = 1/g_m$ naziva *emitorska otpornost zamale signale*.

Ako se zanemari Erlijev efekat relacije $v_{be} = r_\pi i_b$, $i_c = \beta i_b$ i $i_c = g_m v_{be}$ predstavljaju matematički opis modela tranzistora za male signale, koji je u literaturi poznat kao *hibridni π model*. Dve verzije ovog modela realizovane preko elementarnih elemenata su prikazane na slici 8.8.



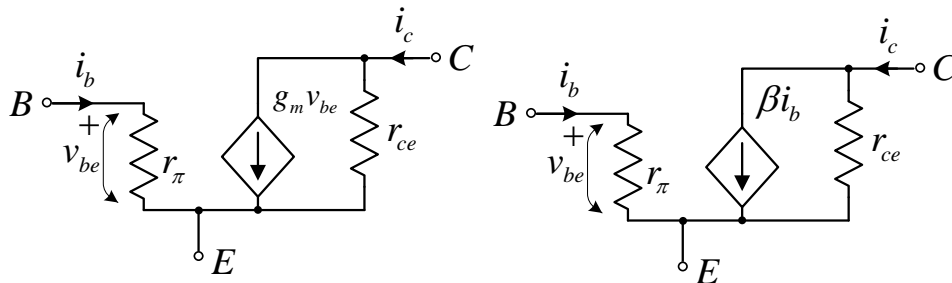
Slika 8.8 Hibridni π modeli tranzistora za male signale.

Kod diskretnih tranzistora Erlijev efekat je u najvećem broju slučajeva zanemariv jer su kod njih dimenzije PN spojeva takve da je sa promenom napona v_{CE} relativna varijacija efektivne širine baze zanemariva. Isto tako komponente sa kojima je povezan tranzistor mogu da budu takve da je Erlijev efekat zanemariv. U slučaju integrisane tehnologije gde su tranzistori malih dimenzija, u mnogim situacijama Erlijev efekat nije zanemariv i mora da se uzme u obzir.

Na osnovu jednačine 8.13, mala promena napona v_{CE} u okolini MRT prouzrokuje i malu promenu struje i_c :

$$\left. \frac{\partial i_c}{\partial v_{CE}} \right|_{i_c=I_C} = \frac{I_C}{V_A} = r_{ce} \quad (8.20)$$

Ekvivalentni otpornik r_{ce} za mali signal dodaje se u modelu tranzistora za mali signal paralelno strujnom izvoru, slika 8.9



Slika 8.9 Hibridni π modeli tranzistora za male signale sa uključenim Erlijevim efektom

U praktičnoj primeni modela za male signale u analizi pojačavačkih kola sa bipolarnim ali i bilo kojim drugim tranzistorima, u pojačavačkoj šemi tranzistor se zamenjuje svojim modelom za mali signal, dok se nezavisni jednosmerni izvori anuliraju (naponski izvori se kratko spajaju, a strujni izvori se raskidaju). Dobijena šema pojačavačkog kola se tada naziva *model pojačavača za mali signal*. Ukoliko se u takvoj šemi pojačavačkog kola zbog jednostavnosti koristi električni simbol tranzistora, ali se podrazumeva da na njegovom mestu stoji model tranzistora za mali signal, tada se takva šema naziva *šema pojačavača za mali signal*.

8.2.4 Model tranzistora za velike signale u režimu zasićenja

Model tranzistora u aktivnom režimu važi sve dok je potencijal kolektora dovoljno veći od potencijala emitora. Granična vrednost napona v_{CE} ispod koje kontrolisani strujni izvor prestaje da radi naziva se napon zasićenja i njegova vrednost je približno

$$V_{CES} \approx 0.2 \text{ V} \quad (8.21)$$

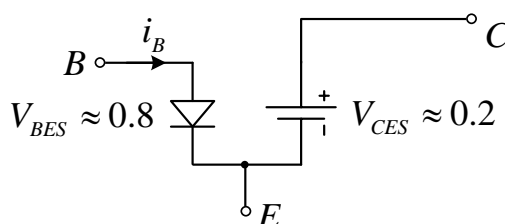
Pošto je u režimu zasićenja napon $v_{CE} \leq V_{CES} \approx 0.2 \text{ V}$, nema svrhe raditi preciznije modelovanje tako da se spoj između kolektora i emitora modeluje naponskim izvorom vrednosti $V_{CES} = 0.2 \text{ V}$. Pri tome je napon između baze i emitora nešto veći nego što je u aktivnom režimu:

$$v_{BE} = V_{BES} \approx 0.8 \text{ V}. \quad (8.22)$$

U režimu zasićenja važi i da je

$$\beta \cdot I_B > I_C. \quad (8.23)$$

Na slici 8.10 prikazan je model tranzistora u zasićenju:



Slika 8.10 Model za veliki signal tranzistora u zasićenju

8.2.5 Probojni naponi

Kod tranzistora u zakočenju ili aktivnom režimu može doći do proboja inverzno polarisanog baza-kolektor spoja kao i do proboja između kolektora i emitora. Iz tog razloga u visokonaponskim primenama treba voditi računa o probojnim naponima kod tranzistora. Probojni naponi su za svaki tip tranzistora kataloški specificirani.

Na sličan način kao i kod *inverzno* polarizovane diode, kod inverzno polarizovanog spoja baza-kolektor može doći do proboja. Po svojoj prirodi taj proboj je dominantno lavinski i nije destruktivan, pod uslovom da je struja koja se generiše u *pn* spoju ograničena i da ne dođe do pregrevanja. Probojni napon između baze i kolektora naziva se BV_{CB0} . Ukoliko je baza na primer uzemljena, povećana struja BC spoja koji je u probouju otići će van tranzistora. Ako je tranzistor tako povezan u kolo da se povećana inverzna struja BE spoja koja je nastala probijem vraća nazad u bazu, ona će da se pojača i formira dodatnu kolektorsku struju. Dodatna kolektorska struja znači i više nosilaca naelektrisanja u sredini u kojoj je već nastao proboj, što će da rezultira samo još većim lavinskim efektom. Zbog toga je probojni napon između kolektora i emitora niži i opisan je formulom, gde je n parametar smanjenja.

$$BV_{CE0} = BV_{CB0} / \sqrt[n]{\beta} \quad (8.24)$$

8.3 Polarizacija tranzistora

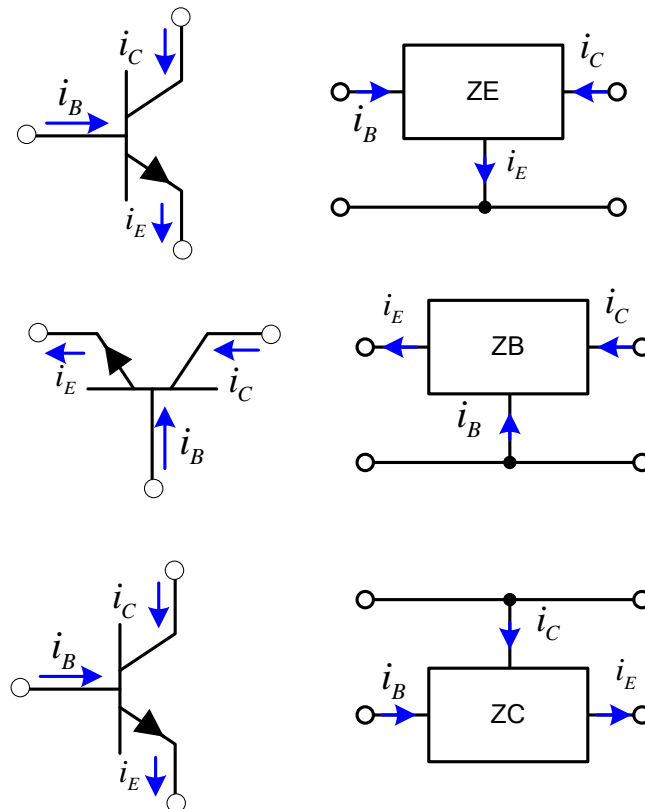
Pod polarizacijom tranzistora se podrazumeva dovođenje odgovarajućih jednosmernih napona ili struja na njegove elektrode, koje će ga postaviti u željeni radni režim. Za aktivni režim je potrebno da se emitorski spoj polariše direktno a kolektorski spoj inverzno, a da se pri tome MRT nalazi na mestu koje je optimalno po nekom unapred zatom kriterijumu.

Da bi mogle da se primene tehnike razrađene u prethodnim poglavljima, a kako je bipolarni tranzistor komponenta sa tri priključka, potrebno je jedan od priključaka definisati *kao*

zajednički. U zavisnosti od toga koji se priključak tretira kao zajednički razlikuju se tri konfiguracije:

- sa zajedničkim emitorom (ZE);
- sa zajedničkom bazom (ZB);
- sa zajedničkim kolektorom (ZC).

Principijelni prikaz sve tri konfiguracije je dat na slici 8.11



Slika 8.11. Bipolarni tranzistor u konfiguraciji sa zajedničkim emitorom, sa zajedničkom bazom i sa zajedničkim kolektorom.

8.3.1 Statičke karakteristike tranzistora

Analitička polarizacija tranzistora pri zanemarenom Erlijevoem efektu, zanemarenom zavisnošću koeficijenta strujnog pojačanja od kolektorske struje, itd, moguća je samo aproksimativno i korisna je za kvalitativnu analizu i sintezu pojačavačkih kola, što će biti prikazano u tekstu koji sledi. Sa druge strane kada je potrebna preciznija polarizacija tada je moguće numeričko određivanje MRT rešavanjem sistema nelinearnih jednačina i upotrebom složenih modela koji uključuju sve efekte. Kako je za različite varijante tranzistora, pogotovu kad su integrisane tehnologije u pitanju, potrebno koristiti izuzetno složene modele, daleko jednostavniji postupak polarizacije se sprovodi grafički na osnovu jednosmernih karakteristika tranzistora, a koje se lako i eksperimentalno određuju ili su dostupne kao kataloški podatak proizvođača.

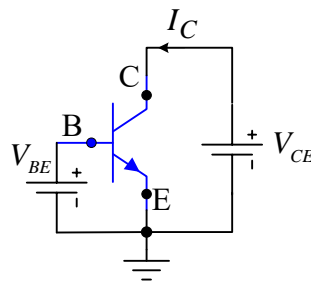
U slučaju konfiguracije sa zajedničkim kolektorom, tranzistorsko kolo se ponaša kao jedinični naponski bafer, nema mogućnost odlaska u zasićenje i poseduje visoku linearnost zbog maksimalne interne negativne povratne sprege. Polarizacija u takvoj konfiguraciji nije kritična i analitički metodi su sasvim dovoljni. Preostale dve konfiguracije su izrazito nelinearne i za pravilno postavljanje MRT analitički metodi nisu dovoljno precizni.

U ZE i ZB konfiguracijama struja kolektora nosi izlaznu informaciju, dok se bazni i emitorski priključci mogu koristiti za kontrolu struje kolektora. Najpogodniji način opisa tranzistora preko statičkih dijagrama jeste kada se zajednički priključak uzemlji, a drugi kontrolni priključak se pobuđuje strujnom ili naponskom pobudom. Pri tome se stanje trećeg priključka koristi kao parametar. Postoje 3 vrste statičkih karakteristika koje su od interesa za projektovanje tranzistorskog pojačavača:

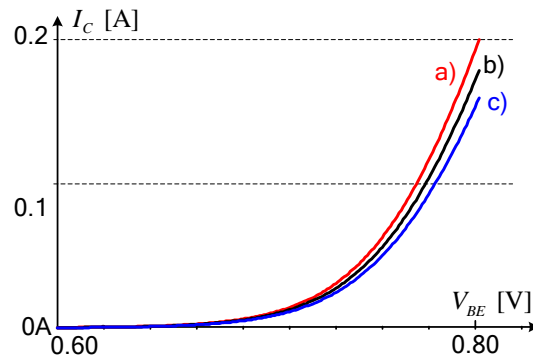
- Jednosmerna (statička) ulazna karakteristika koja grafički prikazuje vezu između ulaznog napona i struje, pri čemu se jedna od izlaznih veličina može koristiti kao parametar. Koristi se za pozicioniranje MRT i određivanje parametra r_{π} .
- Jednosmerna (statička) izlazna karakteristika koja grafički prikazuje vezu između izlaznog napona i struje, pri čemu je jedna od ulaznih veličina može koristiti kao parametar. Koristi se za pozicioniranje MRT i određivanje r_{ce} .
- Jednosmerna (statička) prenosna karakteristika koja grafički prikazuje vezu između jedne ulazne i jedne izlazne veličine, pri čemu je jedna od preostalih veličina može koristiti kao parametar. Koristi se za određivanje pojačanja.

U slučaju ZE ulazna karakteristika $I_B = f_{ul}(V_{BE})$ ista je kao eksponencijalna zavisnost struje diode od napona na diodi tako da se razmatranja iz tog dela poglavlja odnose i na ovaj slučaj.

Na slici 8.12 je prikazana šema za eksperimentalno određivanje prenosne karakteristike koja definiše zavisnost kolektorske struje $I_C = f_{ui}(V_{BE})$ jednog tranzistora, kada se V_{CE} tretira kao parametar. Na slici 8.13 je prikazan primer jedne takve karakteristike za 3 vrednosti napona V_{CE} .

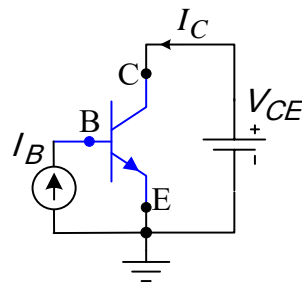


Slika 8.12 Principijska šema za određivanje statičke karakteristike $I_C(V_{BE})$.

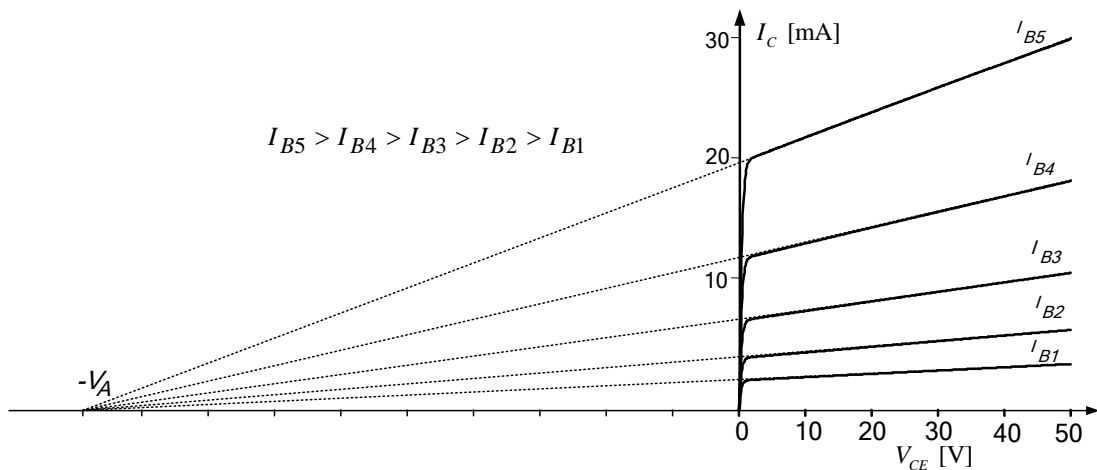


Slika 8.13 zavisnosti kolektorske struje od napona na V_{BE} , tranzistora 2N2222 za tri vrednosti napona V_{CE} : a) 20 V, b) 10 V, i c) 1V. Grafici su dobijeni PSpice simulacijom detaljnog modela tranzistora 2N2222 prema šemi sa slike 8.12

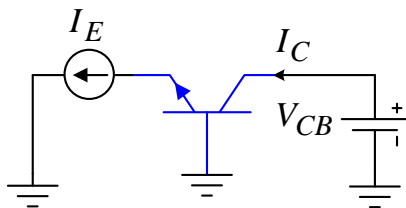
Na slici 8.14 je prikazana šema za eksperimentalno određivanje zavisnosti kolektorske struje od napona V_{CE} kada se i bazna struja tretira kao parametar. Na slici 8.15 je prikazan primer jedne takve karakteristike za nekoliko vrednosti baznih struja. U ovom slučaju prikazane karakteristike obuhvataju pored Erlijevoeg efekta i uticaj kolektorske struje na koeficijent strujnog pojačanja.



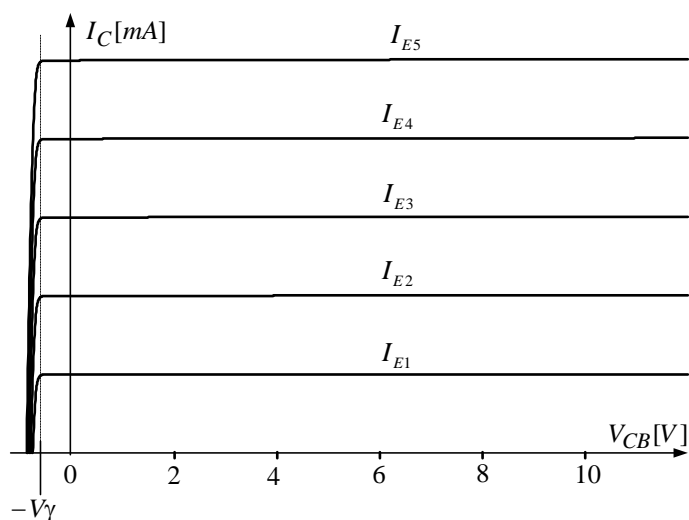
Slika 8.14 Principska šema za određivanje statičke karakteristike $I_C(V_{CE})$ pri konstantnoj struji baze



Slika 8.15 Primer statička izlazne karakteristike $I_C(V_{CE})$ sa strujom baze kao parametrom



Slika 8.16 Principska šema kola za određivanje zavisnosti $I_C(V_{CB})$ pri konstantnoj struji emitora



Slika 8.17 Statička karakteristika $I_C(V_{CB})$ sa strujom emitora kao parametrom.

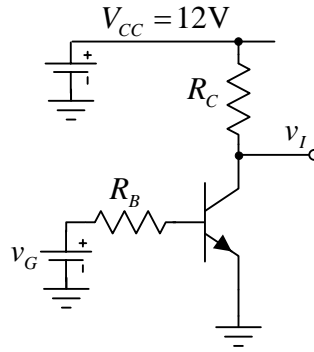
Na slici 8.16. prikazana je konfiguracija u spoju sa zajedničkom bazom i strujnim izvorom u emitoru. Dok je tranzistor u direktnom aktivom režimu, struja kolektora je jednaka

$$I_C = \frac{\beta_F}{1 + \beta_F} I_E, \quad (8.25)$$

pa će promena napona V_{CB} u opsegu u kome tranzistor radi u direktnom aktivnom režimu prouzrokovati zanemarljivu promenu struje kolektora. Na slici 8.17 je prikazana familija krivih $I_C = f(V_{CB})$ gde je struja emitora parametar.

8.3.2 Podešavanje MRT. Određivanje parametara za mali signal.

Na slici 8.18 prikazano je elementarno pojačavačko kolo *naponski invertor* sa NPN tranzistorom u spoju sa ZE. Jednosmerni radni uslovi mogu da se aproksimativno odrede upotrebom unapred usvojenih vrednosti za napon između baze i emitora, kao i za koeficijent strujnog pojačanja β . Ako se usvoji da je vrednost napona provodnog BE spoja $V_{BE} = 0.7$ V, koeficijenta strujnog pojačanja 250, a Erlijev efekat zanemari, sledeće razmatranje definisaće jednosmernu prenosnu karakteristiku $v_I(v_G)$ i parametre jednosmernog režima.



Slika 8.18 Polarizacija naponskog invertora. U električnim šemama elektronskih kola je uobičajeno da se zbog jednostavnosti ne crta baterija V_{CC} .

Tranzistor je u režimu zakočenja kada je $v_G < V_\gamma$ pri čemu je V_γ napon između baze i emitora nakon koga vrednost struje kolektora naglo počinje da raste. Taj napon se naziva prekidni napon i na sobnoj temperaturi iznosi oko 0.5 V. Aproksimativno može da se smatra da je $v_G < V_{BE} = 0.7$ V sve dok je struja baze jednaka nuli. Tada je i struja kolektora jednaka nuli a napon na izlazu je jednak naponu napajanja:

$$i_B = 0 \Rightarrow i_C = 0 \Rightarrow v_I = V_{CC}. \quad (8.26)$$

Kada je struja baze veća od nule tada se usvaja da je napon između baze i kolektora jednak V_{BE} , pa se i struja baze može lako odrediti:

$$i_B(v_G) = \frac{v_G - V_{BE}}{R_B}, \quad (8.27)$$

Ukoliko je i napon $v_{CE} > V_{CES}$ tada je tranzistor u aktivnom režimu i važi da je $i_C = \beta \cdot i_B$, na osnovu čega se dobija izlazni napon:

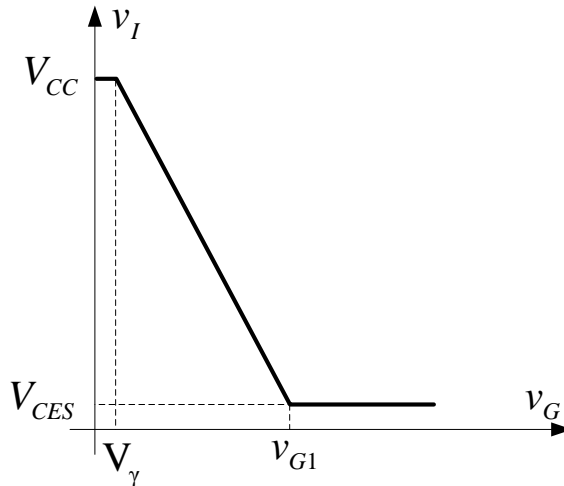
$$v_I(v_G) = V_{CC} - R_C i_C = V_{CC} - \beta R_C \frac{v_G - V_{BE}}{R_B} \quad (8.28)$$

Uvećavanje napona v_G dovešće do smanjivanja napona na izlazu, a kako je napon na izlazu jednak naponu v_{CE} , njegovo opadanje ispod vrednosti V_{CES} prevešće tranzistor u režim zasićenja. Dalje povećanje napona v_G prema usvojenom modelu tranzistora u zasićenju neće uticati na napon v_{CE} pa samim tim ni na izlazni napon. Na slici 8.19 nacrtana je karakteristika definisana izrazom 8.28. Vrednost ulaznog napona v_{G1} pri kome tranzistor prelazi iz aktivnog režima u režim zasićenja dobija se rešavanjem jednačine $v_I(v_{G1}) = V_{CES}$:

$$V_{CES} = v_I(v_{G1}) = V_{CC} - R_C i_C = V_{CC} - \beta R_C \frac{v_{G1} - V_{BE}}{R_B} \quad (8.29)$$

Rešavanjem jednačine 8.29 dobija se

$$v_{G1} = R_B \frac{V_{CC} - V_{CES}}{R_C \beta} + V_{BE} \approx R_B \frac{V_{CC}}{R_C \beta} + V_{BE}. \quad (8.30)$$



Slika 8.19 Jednosmerna prenosna karakteristika kola sa slike 8.18

Iako je osnovna pojačavačka funkcija kola predviđena za režim malih signala, jednosmerna prenosna karakteristika daje sliku o nekim bitnim karakteristikama kola. Nagib karakteristike sa slike, a samim tim i jednosmernog pojačanja, određen je položajem v_{G1} : što je v_{G1} bliže koordinatnom sistemu, to je pojačanje veće, pa će male varijacije parametara kola prouzrokovati velike varijacije struje kolektora i napona na izlazu. Dakle jednosmerno pojačanje treba da bude što je moguće manje, a to se postiže velikom baznom otpornošću.

Jednačina radne prave, u koordinatnom sistemu (V_{CE}, I_C) , definisana je izrazom:

$$I_C = -\frac{V_{CE}}{R_C} + \frac{V_{CC}}{R_C} \quad (8.31)$$

Jedan od empirijskih kriterijuma odabira pozicije MRT jeste da napon između kolektora i emitora u mirnoj radnoj tački V_{CEQ} bude na sredini između napona v_{CE} koji se dobijaju kada je tranzistor na granicama neaktivnih režima:

- kada je tranzistor na granici kočenja $v_{CEmax} = V_{CC}$;
- kada je tranzistor na ivici zasićenja $v_{CEmin} = V_{CES}$.

Tada je

$$V_{CEQ} = \frac{v_{CEmax} + v_{CEmin}}{2} \approx V_{CC} / 2. \quad (8.32)$$

Ako je jedan od članova proizvoda $R_C I_{CQ}$ unapred definisan, drugi se dobija iz jednačine

$$V_{CC} - R_C I_{CQ} = V_{CEQ}. \quad (8.33)$$

Neka je zadato da je $I_{CQ} = 1 \text{ mA}$, tada je vrednost otpornosti $R_C = 6 \text{ k}\Omega$. Struja baze u MRT je

$$I_{BQ} = I_{CQ} / \beta = 4 \text{ }\mu\text{A} \quad (8.34)$$

Neka je sad zadato da je $v_{G1} = 75\% V_{CC} = 9 \text{ V}$. Korišćenjem jednačine 8.29 dobija se da je

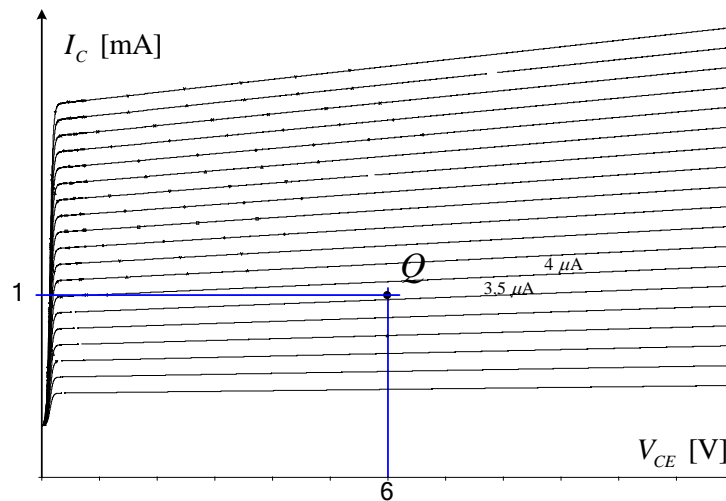
$$R_B = \frac{V_{G1} - V_{BE}}{V_{CC}} \beta R_C = 1037 \text{ k}\Omega. \quad (8.35)$$

Vrednost jednosmernog napona polarizacije dobija se iz jednačine

$$\frac{V_{GQ} - V_{BE}}{R_B} = I_{BQ} \Rightarrow V_{GQ} = R_B I_{BQ} + V_{BE} = (4.15 + 0.7) \text{ V} = 4.85 \text{ V} \quad (8.36)$$

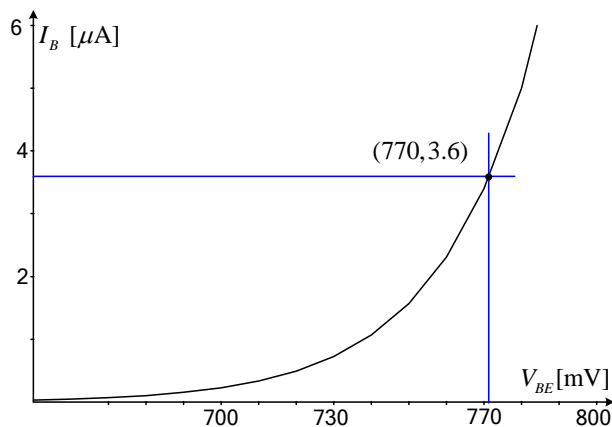
Izračunate vrednosti otpornosti i polarizacionog napona V_{GQ} kada se povežu u kolo sa slike 8.18 daće MRT $Q = (V_{CE}, I_{CQ}) = (5.54 \text{ V}, 1.08 \text{ mA})$, što je u granicama od 10% tolerancije u odnosu na zadate vrednosti.

Ukoliko se koriste statičke karakteristike tranzistora, tada je moguće pronaći vrednosti za I_{BQ} i V_{BEQ} na osnovu kojih će se preciznije odrediti MRT. Na slici 8.20 data je izlazna karakteristika upotrebljenog tranzistora $I_C = f(V_{CE})$ u kojoj je ucrtana i MRT.



Slika 8.20: izlazna karakteristika upotrebljenog tranzistora $I_C = f(V_{CE})$ u kojoj je ucrtana i MRT.

Na osnovu slike 8.20 može da se proceni da je vrednost struje baze u MRT jednaka $I_{BQ} \approx 3.6 \mu\text{A}$.



Slika 8.21: Procena I_{BQ}

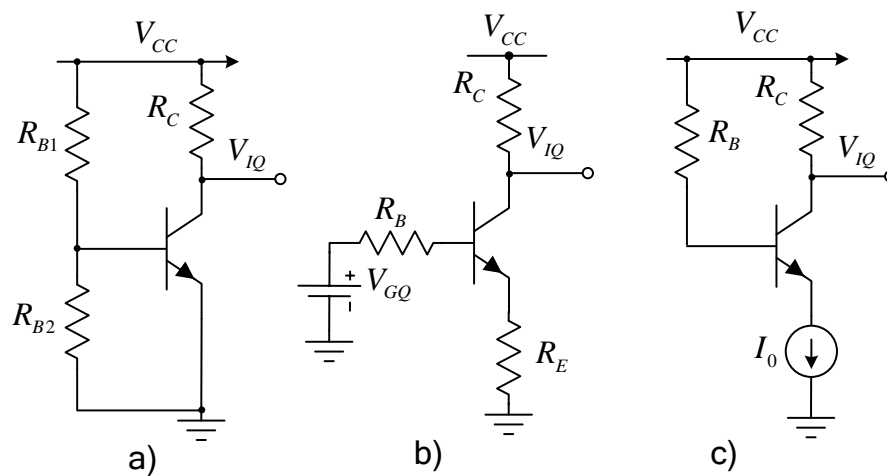
Na slici 8.21 data je ulazna karakteristika upotrebljenog tranzistora $I_B = f(V_{BE})$. Na osnovu prethodno dobijene vrednosti za $I_{BQ} \approx 3.6 \mu\text{A}$, može se rekonstruisati vrednost $V_{BEQ} \approx 0.77 \text{ V}$.

Ako se dobijena vrednost za V_{BEQ} uvrsti u jednačinu 8.35, tada ce se dobiti vrednost baznog otpornika $R_B \approx 1030 \text{ k}\Omega$, dok se zamenom vrednosti $I_{BQ} \approx 3.6 \mu\text{A}$ u jednačinu 8.36 dobija modifikovana vrednost $V_{GQ} \approx 4.85 \text{ V}$.

Modifikovane vrednosti otpornika i polarizacionog napona V_{GQ} kada se povežu u kolo sa slike 8.18 daće MRT $Q = (V_{CE}, I_{CQ}) = (6.00 \text{ V}, 1.00 \text{ mA})$.

8.3.3 Podešavanje MRT sa jednom baterijom za napajanje i stabilizacija MRT

U praksi se izbegava napajanje sa dve baterije, pa je potrebno i bazno kolo napajati iz iste baterije kao i kolektor. To se standardno izvodi razdelnikom napona, slika 8.22 a):



Slika 8.22 Polarizacija npn tranzistora za rad u aktivnom režimu

Primenom Tevenenove teoreme na ulazno kolo, koje se sastoji od baterije V_{CC} i otpornika R_{B1} i R_{B2} , lako se dobija:

$$V_{GQ} = V_{CC} \frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}}, \quad R_B = R_{B1} \parallel R_{B2} = \frac{R_{B1} R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} \quad (8.37)$$

čime se kolo za polarizaciju svodi na već analizirani slučaj sa dve baterije.

Za pozicioniranje MRT ključne su jednačine 8.34 i 8.35, jer se njima definiše bazna struja, koja preko parametra β definiše i kolektorsku struju a samim tim i MRT. Navešćemo dva razloga zbog kojih polarizacija tranzistora baznom strujom nije pouzdana.

- Parametar β nije precizan i među tranzistorima istog tipa može znatno da odstupa od tipične vrednosti čak i preko $\pm 25\%$.
- U prethodnom razmatranju smo videli da uticaj preciznosti napona V_{BE} može da bude značajan, jer se bazna struja računa direktno preko njega. S obzirom da je napon V_{BE} temperaturno promenljiv sa koeficijentom od $-2.05 \text{ mV}/^\circ\text{C}$, biće temperaturno promenljiva i bazna struja, a samim tim će i MRT biti temperaturno nestabilna.

Iz navedenih razloga polarizacija strujom emitora je znatno bolja opcija, jer je uvek ispunjeno da je $\alpha \approx 1$.

Na slici 8.22 b): prikazana je šema u kojoj je stabilizacija MRT realizovana postavljanjem otpornika u emitor. Emitorska struja u MRT je pojačana bazna struja, na osnovu čega se može dobiti napon na emitoru u MRT:

$$I_{EQ} = (1 + \beta)I_{BQ} \Rightarrow V_{EQ} = (1 + \beta)I_{BQ}R_E \quad (8.38)$$

Sada su bazna i emitorska struja date sa

$$I_{BQ} = \frac{V_{GQ} - V_{BEQ} - V_{EQ}}{R_B} = \frac{V_{GQ} - V_{BEQ} - (1 + \beta)I_{BQ}R_E}{R_B} = \frac{V_{GQ} - V_{BEQ}}{R_B + (1 + \beta)R_E}, \quad (8.39)$$

$$I_{CQ} = \beta I_{BQ} = \beta \frac{V_{GQ} - V_{BEQ}}{R_B + (1 + \beta)R_E} \approx \frac{V_{GQ} - V_{BEQ}}{R_E}. \quad (8.40)$$

Dakle u definisanju struje kolektora u MRT ne učestvuje koeficijent β , a temperaturna varijacija napona V_{BEQ} može lako da se relativizuje pogodnim izborom vrednosti V_{GQ} .

Alternativa stabilizaciji mirne radne tačke otpornikom u emitoru je polarizacija strujnim izvorom u emitorskom kolu, što je prikazano na slici 8.22 c). U ovom slučaju $I_{CQ} = \alpha \cdot I_0$ što je automatski stabilno.

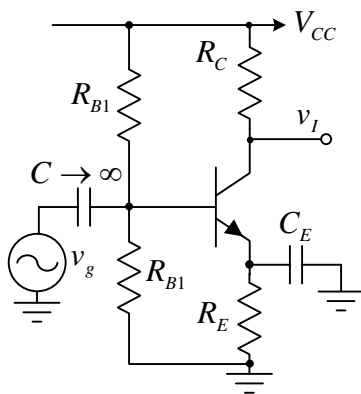
8.4 Osnovna pojačavačka kola sa jednim tranzistorom

S obzirom da se kod bipolarnog tranzistora struja kolektora može kontrolisati promenom struje baze, odnosno promenom napona baza-emitor, bipolarni tranzistor može poslužiti kao pojačavač signala. Pošto se promenljivi ulazni signal uvek mora dovesti između baze i emitora, a izlaz se može uzeti bilo sa kolektora bilo sa emitora, zavisno od toga koja je od elektroda tranzistora na konstantnom potencijalu, razlikuju se tri osnovne konfiguracije: *pojačavač sa zajedničkim emitorom*, *pojačavač sa zajedničkim kolektorom* i *pojačavač sa zajedničkom bazom*.

U daljem tekstu će biti analizirane sve tri konfiguracije u režimu rada sa malim signalima i biće određene njihove osnovne karakteristike: naponsko pojačanje, strujno pojačanje, ulazna otpornost i izlazna otpornost. Princip analize će uvek biti isti. Tranzistor će biti zamenjen modelom za male signale, kratko spojiće se jednosmerni naponski izvori, formiraće se i rešiti jednačine koje opisuju kolo i na kraju će biti nađeni odgovarajući odnosi.

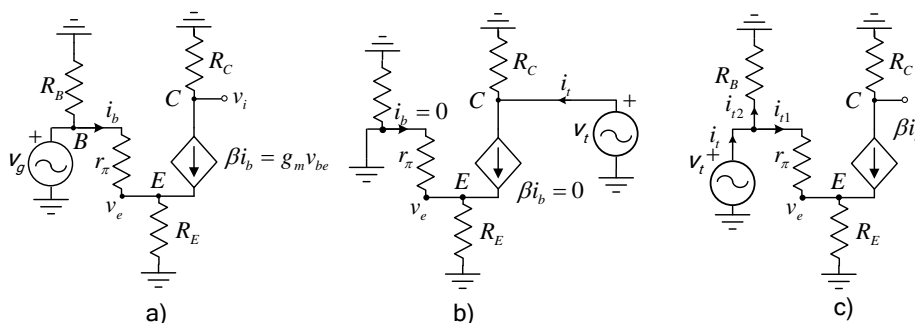
8.4.1 Pojačavač sa zajedničkim emitorom

Pojačavač sa zajedničkim (uzemljenim) emitorom prikazan je na slici 8.23. u dve moguće varijante: sa $C_E \rightarrow \infty$ i sa $C_E = 0$. Pri tome $C_E \rightarrow \infty$ ima smisao da je kondenzator kratak spoj za AC signale ali i dalje otvorena veza za DC signale. Vidi se da je pobuda priključena između baze i mase, a da se izlazni napon računa između kolektora i mase.



Slika 8.23 Pojačavač sa zajedničkim emitorom.

Ako je $C_E = 0$ i posle zamene ulaznog kola po Tevenenovoj teoremi, zamene tranzistora hibridnim π modelom za male signale i eliminacije jednosmernih izvora, dobija se kolo prikazano na slici 8.24 a).



Slika 8.24 a) Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim emitorom; b) određivanje izlazne otpornosti; c) određivanje ulazne otpornosti.

Emitorska struja je pojačana bazna struja pa je potencijal emitora jednak:

$$i_e = (1 + \beta)i_b \Rightarrow v_e = (1 + \beta)i_b R_E \quad (8.41)$$

Na osnovu toga je moguće odrediti i baznu struju

$$i_b = \frac{v_g - v_e}{r_\pi} = \frac{v_g - (1 + \beta)i_b R_E}{r_\pi} \Rightarrow i_b = \frac{v_g}{r_\pi + (1 + \beta)R_E}, \quad (8.42)$$

odakle direktno sleduje izlazni napon

$$v_i = -R_C i_c = -R_C \beta i_b = -\frac{\beta R_C}{r_\pi + (1 + \beta)R_E} v_g \quad (8.43)$$

Dakle pojačanje za mali signal ovakvog pojačavača je dato sa

$$a_v = v_i / v_g = -\frac{\beta R_C}{r_\pi + (1 + \beta)R_E} \quad (8.44)$$

Aproksimacija koja nikad ne unosi bitnu grešku glasi

$$a_v = -\frac{\beta R_C}{\beta / g_m + (1 + \beta) R_E} \approx -\frac{R_C}{1 / g_m + R_E} = -\frac{g_m R_C}{1 + g_m R_E} \quad (8.45)$$

Ulazna i izlazna otpornost pojačavača se dobijaju pomoću šema na slici 8.24: b) i c). Očigledno je da je izlazna otpornost $R_i = R_C$, dok se ulazna otpornost računa kao

$$r_u = v_t / i_t = (r_\pi + (1 + \beta) R_E) \parallel R_B \quad (8.46)$$

pri čemu je ispunjeno da je

$$i_t = i_{t1} + i_{t2}, \quad i_{t2} = \frac{v_t}{R_B}, \quad i_{t1} = \frac{v_t}{r_\pi + (1 + \beta) R_E}. \quad (8.47)$$

Strujno pojačanje pojačavača sa zajedničkim emitorom je:

$$a_i = \frac{i_i}{i_u} = \frac{v_i / r_i}{v_g / r_u} = \frac{-\frac{\beta R_C}{r_\pi + (1 + \beta) R_E} v_g \frac{1}{R_C}}{\frac{v_g}{(r_\pi + (1 + \beta) R_E) \parallel R_B}} = -\beta \frac{R_B}{r_\pi + (1 + \beta) R_E + R_B} \quad (8.48)$$

Kada kondenzator $C_E \rightarrow \infty$, otpornik R_E je kratko spojen i u prethodnim formulama umesto njega treba staviti nulu. U tom slučaju dobijaju se sledeće karakteristike:

$$a_v = -g_m R_C, \quad r_u = r_\pi \parallel R_B, \quad r_i = R_C \quad \text{i} \quad a_i = -\beta \frac{R_B}{r_\pi + R_B}. \quad (8.49)$$

Dakle, kada kondenzator $C_E \rightarrow \infty$, pojačavač sa zajedničkim emitorom može imati veliko naponsko i strujno pojačanje, ulazna otpornost mu nije velika, dok je izlazna otpornost određena vrednošću otpornosti u kolu kolektora i obično ima veliku vrednost. Naponsko pojačanje je negativno što znači da u slučaju naizmeničnog pobudnog napona pojačavač sa zajedničkim emitorom unosi faznu razliku od 180° između ulaznog i izlaznog signala, odnosno obrće fazu.

Primer: P8.1

Dat je pojačavač sa zajedničkim emitorom kod koga je $C_E = 0$. Poznato je: $\beta = 100$, $V_{CC} = 12\text{V}$, $R_C = 1\text{k}\Omega$, $R_E = 250\ \Omega$, $V_{BE} \approx 0.75\text{V}$, $R_{B1}, R_{B2} = 100\text{k}\Omega$, $C_E = 0$, $v_{gm} = 2\text{mV}$.

- Odrediti struju kolektora i izlazni napon u MRT.
- odrediti pojačanje i ulaznu otpornost za mali signal.

Rešenje:

- Struja kolektora i izlazni napon u MRT:

$$I_{CQ} = \beta I_{BQ} = \beta \frac{V_G - V_{BE}}{R_B + (1 + \beta) R_E} = 100 \frac{5.25}{50\text{k} + 25\text{k}} = 7\text{mA}$$

$$V_{IQ} = V_{CC} - R_C I_{CQ} = 12 - 7 = 5\text{V}, \quad V_{EQ} = R_E I_{CQ} \approx 1.75\text{V}$$

Parametri tranzistora za mali signal:

$$g_m = I_{CQ} / V_T \approx 7 \text{ mA} / 25 \text{ mV} = 0.28 \text{ S}$$

$$r_\pi = \beta / g_m = 360 \Omega$$

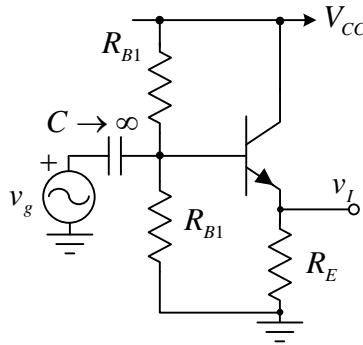
b) ulazna otpornost i pojačanje:

$$r_u = (r_\pi + (1 + \beta)R_E) \parallel R_B = 25 \text{ k}\Omega \parallel 50 \text{ k}\Omega = 16.666 \text{ k}\Omega,$$

$$a_v = -\frac{\beta R_C}{r_\pi + (1 + \beta)R_E} \approx 4.$$

8.4.2 Pojačavač sa zajedničkim kolektorom

Kod pojačavača sa zajedničkim (uzemljenim) kolektorom, koji je prikazan na slici 8.25, kolektor je vezan direktno na bateriju za napajanje, odnosno vezan je na masu za promenljivi signal. Pobuda je priključena između baze i kolektora (mase), a izlazni napon se uzima između emitora i kolektora (mase).



Slika 8.25 Pojačavač sa zajedničkim kolektorom

Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim kolektorom dobija se na isti način kao kod pojačavača sa zajedničkim emitorom i prikazano je na slici 8.26. Emitorska struja je pojačana bazna struja, pa je potencijal emitora jednak:

$$i_e = (1 + \beta)i_b \Rightarrow v_e = (1 + \beta)i_b R_E \quad (8.50)$$

Na osnovu toga je moguće odrediti i baznu struju

$$i_b = \frac{v_g - v_e}{r_\pi} = \frac{v_g - (1 + \beta)i_b R_E}{r_\pi} \Rightarrow i_b = \frac{v_g}{r_\pi + (1 + \beta)R_E}, \quad (8.51)$$

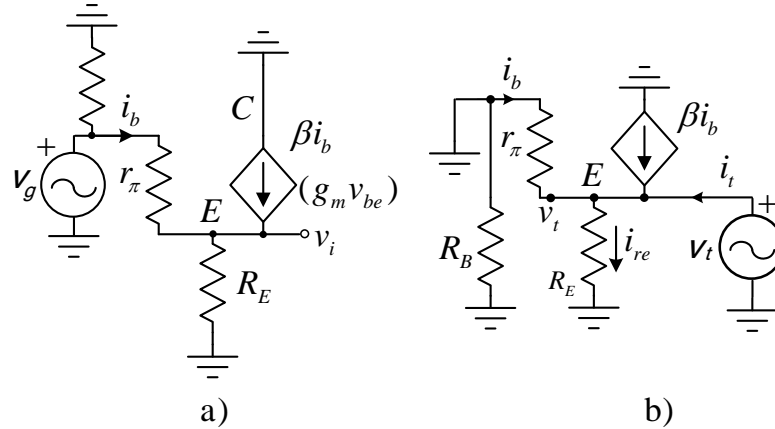
odakle direktno sleduje izlazni napon:

$$v_i = R_E i_e = (1 + \beta)i_b R_E = \frac{(1 + \beta)R_E}{r_\pi + (1 + \beta)R_E} v_g \approx \frac{g_m R_E}{1 + g_m R_E} v_g \quad (8.52)$$

Stoga je naponsko pojačanje za mali signal ovakvog pojačavača dato sa:

$$a_v = v_i / v_g = \frac{g_m R_E}{1 + g_m R_E} v_g \quad (8.53)$$

Nje teško ostvariti da je $g_m R_E \gg 1$ i u tom slučaju je naponsko pojačanje $a_v \approx 1$



Slika 8.26: a) Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim kolektorom; b) računanje izlazne otpornosti

Sa slike 8.26 a) se može odrediti i *ulazna otpornost* koja jednaka kao u slučaju ZE pojačavača kod koga je $C_E = 0$:

$$r_u = (r_\pi + (1 + \beta)R_E) \parallel R_B \quad (8.54)$$

Izlazna otpornost se određuje sa slike 8.26 b). Struja koju predaje test generator iznosi

$$i_t = i_{re} - i_b - \beta i_b = i_{re} - (1 + \beta)i_b \quad (8.55)$$

Pri tome je $i_{re} = v_t / R_E$, $i_b = -v_t / r_\pi$. Sada može da se kompletira struja test generatora i ona iznosi

$$i_t = v_t (1 / R_E + (1 + \beta) / r_\pi) \approx v_t (1 / R_E + g_m) = v_t / r_i \quad (8.56)$$

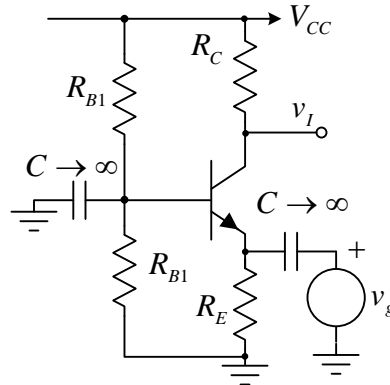
Proizilazi da je

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{R_E} + g_m \Rightarrow r_i = R_E \parallel \frac{1}{g_m}, \quad (8.57)$$

odakle se može zaključiti da izlazna otpornost pojačavača sa zajedničkim kolektorom može da bude vrlo mala.

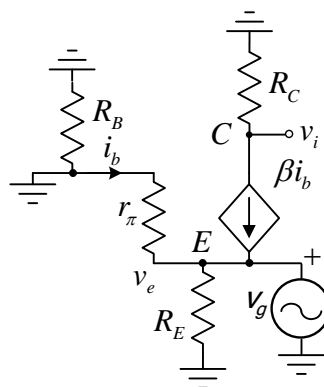
Dakle, pojačavač sa zajedničkim kolektorom ima naponsko pojačanje manje od jedan, veliku ulaznu otpornost i malu izlaznu otpornost. Naponsko pojačanje je pozitivno, odnosno, pojačavač sa zajedničkim kolektorom ne obrće fazu.

Kod pojačavača sa zajedničkom (uzemljenom) bazom, koji je prikazan na slici 8.27, baza je vezana na konstantan napon iz razdelnika napona, odnosno vezana je na masu za promenljivi signal. Pobuda je priključena između emitora i baze (mase), a izlazni napon se uzima između kolektora i baze (mase).



Slika 8.27 Pojačavač sa zajedničkom bazom.

Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkom bazom dobija se na isti način kao kod pojačavača sa zajedničkim emitorom i prikazano je na slici 8.28.



Slika 8.28 Ekvivalentno kolo za mali signal pojačavača sa zajedničkom bazom

Sa slike 8.28 se posle kraćeg izračunavanja dobija naponsko pojačanje pojačavača sa zajedničkom bazom:

$$\left. \begin{aligned} v_i &= -R_C i_c = -R_C \beta i_b = -\beta R_C \left(-\frac{v_g}{r_\pi} \right) \\ v_i &= -R_C i_c = -R_C g_m v_{be} = -R_C g_m (-v_g) \end{aligned} \right\} a_v = g_m R_C \quad (8.58)$$

Očigledno je da je izlazna otpornost jednaka R_C a da je ulazna otpornost jednaka izlaznoj otpornosti ZC pojačavača.

Mala ulazna otpornost je osobina koja ne odgovara naponskoj pobudi, već je pogodna za strujnu pobudu. Stoga je ZB pojačavač koristan kao strujni pojačavač. Ukoliko bi važio da je $R_E \gg 1/g_m$ što se lako da ostvariti, strujno pojačanje bi tada iznosilo

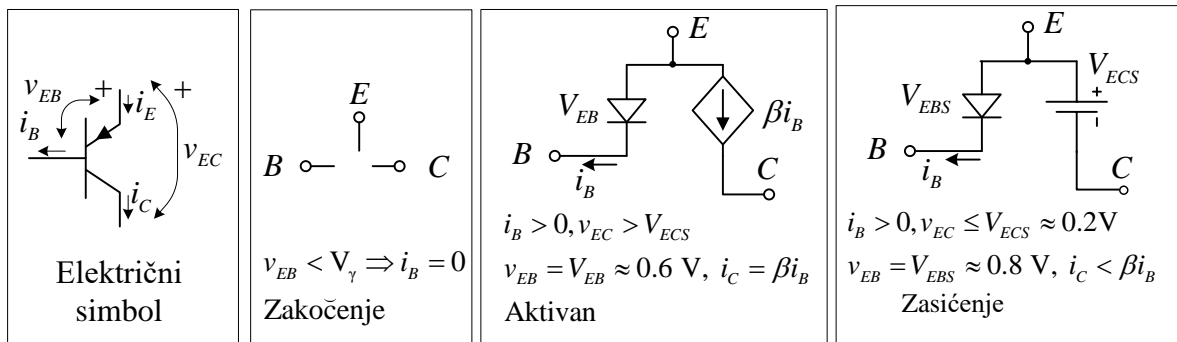
$$a_i = \frac{\beta}{\beta + 1} = \alpha \approx 1. \quad (8.59)$$

odnosno, blisko je, ali manje od jedan. Iz tog razloga se ovakav pojačavač zove i *strujni bafer*.

Dakle, pojačavač sa zajedničkom bazom ima veliko naponsko i jedinično strujno pojačanje, ulazna otpornost mu je vrlo mala, dok je izlazna otpornost određena vrednošću otpornika u kolu kolektora i obično ima veliku vrednost. Naponsko pojačanje je pozitivno, odnosno, pojačavač sa zajedničkom bazom ne obrće fazu.

8.4.4 Pojačavači sa PNP tranzistorima

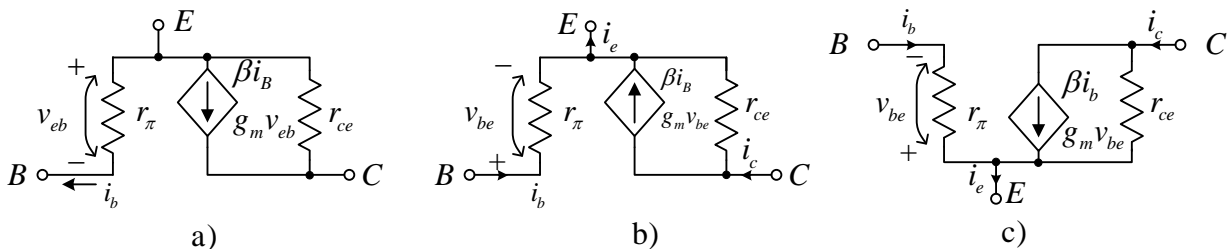
Na slici 8.29 prikazan je električni simbol, model PNP tranzistora, model za veliki signal, kao i režimi rada.



Slika 8.29 Električni simbol, model PNP tranzistora, model za veliki signal, kao i režimi rada

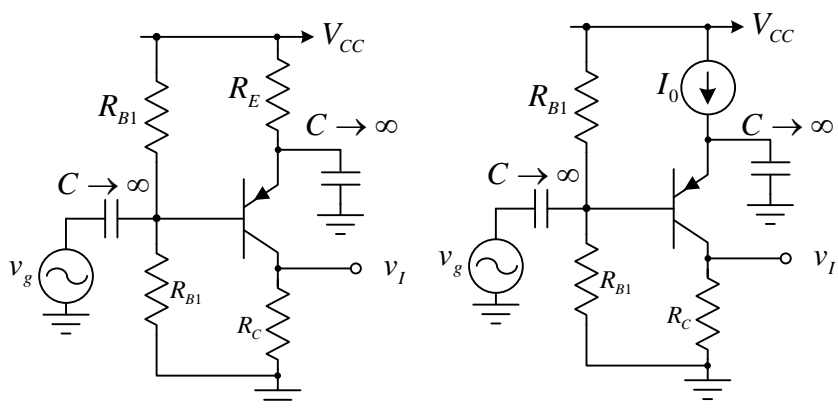
Model PNP tranzistora za mali signal izvodi se na isti način kao model NPN tranzistora. Na slici 8.30 a) prikazan je model PNP tranzistora za mali signal direktno izveden iz modela za veliki signal, dok je na slici b) i c) prikazan ekvivalentni model unificiran sa modelom za mali signal NPN tranzistora. Unifikacija omogućuje da se obe vrste tranzistora tretiraju na isti način:

- r_{π} je uvek između B i E,
- Kontrolisan izvor je uvek usmeren od C ka E,
- r_{ce} je uvek između C i E,
- $i_e = i_b + i_c$, sa smerovima kao na slici 8.30 b),c).



Slika 8.30: Model PNP tranzistora za mali signal: a) direktno izveden iz modela za veliki signal; b),c) model sa prilagođenim referentnim smerovima identičan modelu NPN tranzistora za mali signal

Osnovne pojačavačke sprege se izvode na isti način kao u slučaju NPN tranzistora, polarizacija se radi na isti način, a i parametri pojačavača za mali signal su isti. Na slici 8.31 prikazan je ZE pojačavač polarizovan otpornikom u emitoru a) i polarizovan strujnim izvorom u emitoru b). U oba slučaja pojačanje, ulazna i izlazna otpornost su dati izrazima 8.49.



Slika 8.31: Šema ZE pojačavača sa PNP tranzistorom: a) polarizacija sa otpnikom u emmitoru; b) polarizacija sa strujnim izvorom u emitoru.

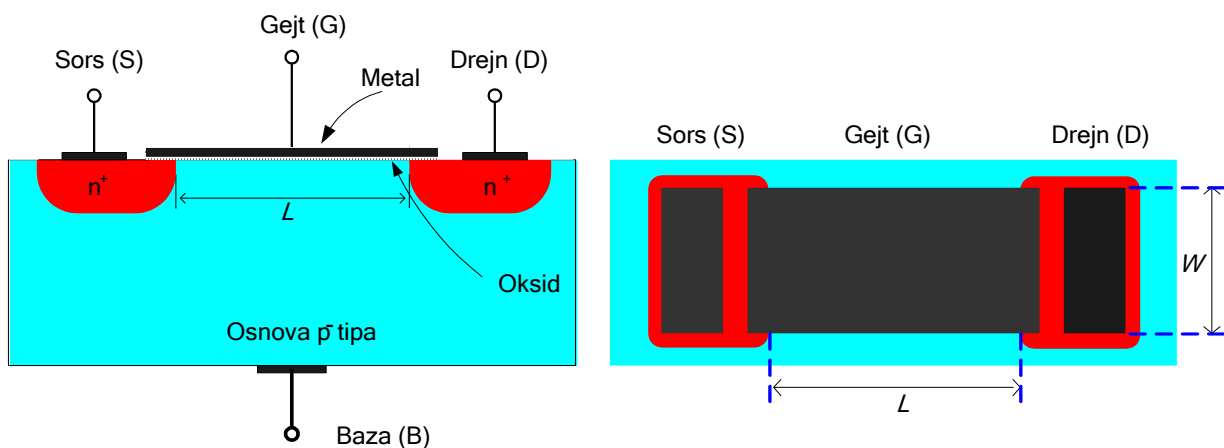
9 MOS tranzistor (MOSFET)

Pored bipolarnog tranzistora, u savremenoj elektronici se koristi još jedan tip tranzistora, poznat kao MOSFET tranzistor. Skraćenica MOSFET (**M**etal **O**xide **S**emiconductor **F**ield **E**ffect **T**ransistor) ukratko opisuje strukturu i princip rada ovog tipa tranzistora. Za razliku od bipolarnog tranzistora, kontrolna elektroda je kod MOS tranzistora izolovana, a kontrola struje se vrši električnim poljem. Kao posledica ove činjenice, struja se sastoji samo od jednog tipa nosilaca (elektrona kod NMOS tranzistora ili šupljina kod PMOS tranzistora), tako da se ovaj tip tranzistora često naziva i *unipolarni tranzistor*.

Princip rada MOS tranzistora opisan je još 1930. godine, znatno pre pojave bipolarnih tranzistora, ali je zbog teškoća u realizaciji prvi MOS tranzistor eksperimentalno realizovan tek sredinom sedme decenije dvadesetog veka, a krajem te decenije ulaze u širu upotrebu. Zbog svojih osnovnih osobina da imaju jednostavnu strukturu i male dimenzije, MOS tranzistori su postali dominantni u realizaciji digitalnih logičkih funkcija i memorija, ali se sve više koriste i u realizaciji analognih elektronskih kola.

9.1 Struktura i simboli MOS tranzistora

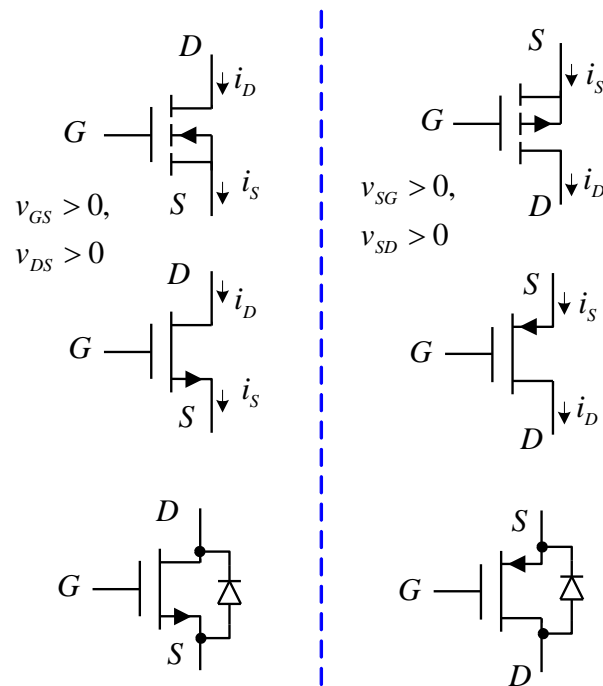
Uprošćena struktura jedne varijante NMOS tranzistora je prikazana na slici 9.1, gde je na levoj strani prazan poprečni presek kroz NMOS tranzistor, a na desnoj strani pogled odozgo na isti tranzistor. Kao što se vidi, u ovoj varijanti NMOS tranzistor se realizuje na podlozi (osnovi, supstratu) p tipa, u kojoj su postupkom difuzije napravljena dva jako dopirana n^+ regiona, koji se nazivaju *sors* (source) i *drejn* (drain). Površina između sorsa i drejna je prekrivena tankim slojem (20-100 nm) silicijum dioksida (SiO_2), preko koga je nanesen sloj metala, koji čini treću, kontrolnu elektrodu, koja se naziva *gejt* (gate). Četvrta elektroda povezana je za osnovu i zove se *baza*. Da bi se ostvarila veza sa ostatkom električnog kola, područja sorsa i drejna, kao i podloga, imaju metalne kontakte. Dakle, MOS tranzistor ima četiri elektrode. Međutim, u osnovnim aplikacijama osnova je kratko spojena sa sorsom, tako da ćemo u daljim izlaganjima MOS tranzistor tretirati kao poluprovodnički element sa tri elektrode. Interesantno je, za razliku od bipolarnog tranzistora, da je struktura MOS tranzistora potpuno simetrična i da asimetriju pravi jedino spajanje sorsa i osnove, odnosno da je sors ona elektroda koja je spojena sa osnovom.



Slika 9.1: Struktura NMOS tranzistora.

Dimenzije MOS tranzistora su veoma male. Kod diskretnih signalnih tranzistora tipične vrednosti rastojanja sorsa i drejna, L , su od 1 do 10 μm , dok su tipične vrednosti širine istog područja, W , od 2 do 500 μm . U savremenim integrisanim kolima velike složenosti, kao što su mikroprocesori i memorije, minimalne dimenzije su daleko ispod 1 μm , što omogućava realizaciju više miliona tranzistora na jednoj silicijumskoj podlozi (čipu).

Pored NMOS tranzistora, koji je prikazan na slici 9.1, postoji još jedan tip MOS tranzistora, poznat kao PMOS tranzistor. On se realizuje na podlozi n tipa, dok su područja sorsa i drejna jako dopirani p^+ regioni. Simboli NMOS i PMOS tranzistora koji se koriste u električnim šemama prikazani su na slici 9.2.



Slika 9.2: Potpuni i uprošćeni električni simboli NMOS i PMOS tranzistora sa ispravnom polarizacijom. Interna struktura tranzistora je takva da se između drejna i sorsa nalazi dioda koja se podrazumeva kao deo tranzistora i ne crta se. Ako je polarizacija ispravna interna dioda je inverzno polarizovana i ne utiče na rad tranzistora

9.2 Princip rada NMOS tranzistora

Kada na gejt nije priključen nikakav napon, između sorsa i drejna su vezane dve diode na red. Jednu diodu čine osnova i n^+ oblast sorsa, a drugu diodu osnova i n^+ oblast drejna. Ove dve diode sprečavaju protok struje od drejna do sorsa kada se primeni napon v_{DS} . Između sorsa i drejna postoji velika otpornost, reda $10^{12} \Omega$.

Pretpostavimo sada da su sors i drejn vezani na masu, a da je na gejt doveden pozitivan napon v_{GS} . Ovaj pozitivan napon odbija šupljine, koje su većinski nosioci u podlozi, dalje od područja ispod gejta i ostavlja nepokretne, negativno naelektrisane akceptorske atome. Dakle, ispod gejta se stvara oblast u kojoj ima malo pokretnih nosilaca, koja se naziva *osiromašena oblast*.

Međutim, dovoljno veliki pozitivan napon na gejtu može da privuče slobodne elektrone iz n^+ oblasti sorsa i drejna. Ovi slobodni elektroni se grupišu u podlozi neposredno ispod gejta i stvaraju provodnu n oblast koja se naziva *kanal*. Ako se između drejna i sorsa primeni neki napon v_{DS} , kroz kanal će proteći struja. Dakle, pozitivan napon na gejtu izaziva stvaranje ili

indukciju kanala, tako da se ova vrsta MOS tranzistora naziva *tranzistor sa indukovanim n kanalom*. S obzirom da su slobodni nosioci u kanalu elektroni, ovaj tranzistor se naziva i NMOS tranzistor sa indukovanim kanalom. Takođe, treba primetiti da se celokupna struja sastoji od kretanja elektrona, a da šupljine nemaju nikakav uticaj. Zbog toga što u formiranju struje učestvuje samo jedan tip nosilaca (suprotan od tipa podloge), ovakvi tranzistori se nazivaju i *unipolarni tranzistori*.

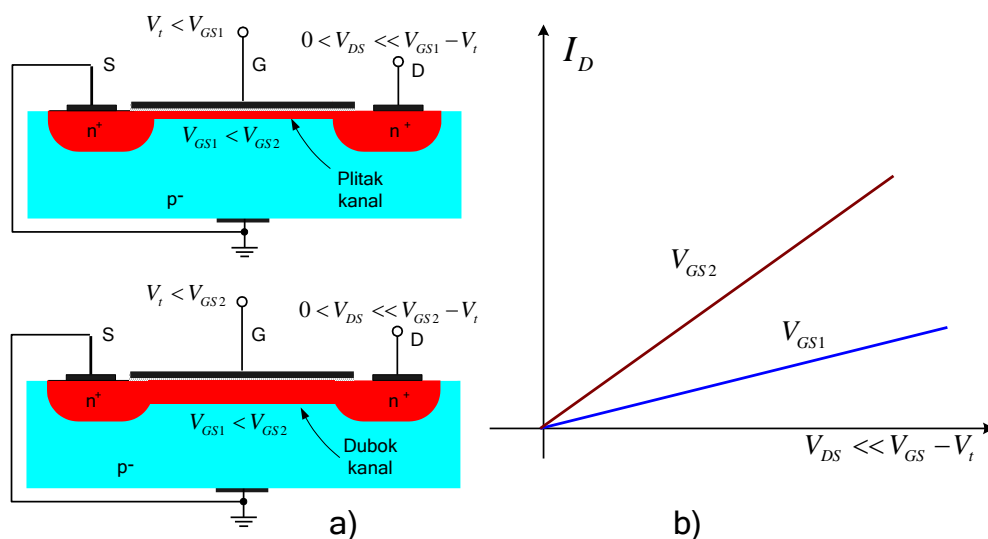
Minimalni napon između gejta i sorsa koji obezbeđuje formiranje kanala naziva se *napon praga provođenja* i obeležava sa V_t . Vrednosti ovog napona zavise od proizvodnog procesa i tipično se u slučaju diskretnih tranzistora nalaze u opsegu od 1 V do 3 V.

Metalna elektroda gejta, oksid između gejta i osnove i osnova formiraju kondenzator. Kada se dovede napon na gejta, u dielektriku kondenzatora se pojavljuje električno polje. To električno polje kontroliše broj slobodnih nosilaca u kanalu, odnosno provodnost kanala. Zato se MOS tranzistori svrstavaju u grupu *tranzistora sa efektom polja*, jer se električnim poljem reguliše struja kroz kanal kada se primeni napon v_{DS} .

9.2.1 Ponašanje NMOS tranzistora pri malim naponima V_{DS}

Pretpostavimo da je između gejta i sorsa doveden napon $v_{GS} > V_t$, tako da je formiran indukovani kanal, kao i da je između drejna i sorsa primenjen mali pozitivan napon v_{DS} reda stotinak mV, slika 9.3 a). Dubina kanala će zbog toga da bude približno ravnomerna. Kroz indukovani kanal će se kretati elektroni od sorsa ka drejnu, odnosno kroz kanal će proticati struja čiji je smer od drejna ka sorsu. Smer ove struje pokazuje strelica u uprošćenom simbolu NMOS tranzistora. Jačina struje zavisi od broja slobodnih nosilaca u kanalu, što zavisi od dubine kanala. Dubina kanala zavisi od razlike $v_{GS} - V_t$ - što je potencijal gejta veći kanal je dublji, ima više nosilaca, tj manju otpornost. Dakle, struja drejna i_D biće proporcionalna naponu $v_{GS} - V_t$ i naponu v_{DS} . Struja sorsa je jednaka struji drejna, s obzirom da je struja gejta jednaka nuli jer je gejta izolovana elektroda.

Dakle, u režimu malih napona drejn-sors, NMOS tranzistor radi kao *otpornik čija se otpornost može kontrolisati naponom na gejtu*, što je ilustrovano slikom 9.3 b).



Slika 9.3. NMOS tranzistor u omskoj oblasti

Ako se napon v_{DS} poveća doći će do poremećaja u ravnomernosti dubine kanala, što će dovesti do toga da je otpornost kanala nelinearno zavisi od napona v_{DS} i v_{GS} . Detaljnijim

razmatranjem fizičkih pojava u kanalu može se izvesti jednačina zavisnosti struje i_D od napona v_{GS} i v_{DS} , što izlazi izvan okvira ove knjige. Kao krajnji rezultat se dobija jednačina:

$$i_D = \frac{B}{2} \left[2(v_{GS} - V_t)v_{DS} - v_{DS}^2 \right] \quad (9.1)$$

pri čemu je $B = \mu_n C_{ox} W / L$. Dakle, struja drejna zavisi od fizičkih konstanti, parametara tehnološkog procesa, geometrijskih dimenzija tranzistora i primenjenih napona v_{GS} i v_{DS} .

Fizičke konstante:

- μ_n - pokretljivost negativnih nosilaca - elektrona; u slučaju PMOS tranzistora pokretljivost pozitivnih nosilaca - šupljina se obeležava sa μ_p , $\mu_p < \mu_n$
- C_{ox} - kapacitivnost gejta po jedinici površine

Parametri tehnološkog procesa:

- Napon praga V_t

geometrijske dimenzija tranzistora:

- W – širina gejta (kanala)
- L – dužina gejta (kanala)

Oblast rada NMOS tranzistora u režimu malih napona v_{DS} naziva se *omska oblast* (jer se MOS tranzistor ponaša kao otpornik) ili *triodna oblast* (po sličnosti karakteristika sa davno korišćenom elektronskom cevi triodom).

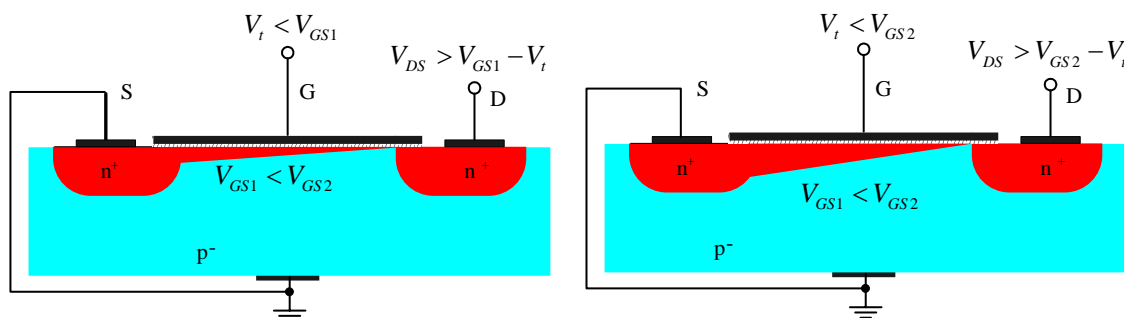
9.2.2 Ponašanje NMOS tranzistora pri većim naponima V_{DS}

Neka je $v_{GS} - V_t$ konstantno. Pri većim naponima v_{DS} , napon između gejta i sorsa neće biti jednak naponu između gejta i drejna. Zbog toga će se napon između gejta i kanala menjati od v_{GS} na strani sorsa do $v_{GD} = v_{GS} - v_{DS}$ na strani drejna. Pošto dubina kanala zavisi od ovog napona, na strani sorsa kanal će prodirati dublje u podlogu, a na strani drejna kanal će biti plići. Sa porastom napona v_{DS} struja drejna raste prema formuli 9.1, ali i smanjenje dubine kanala na strani drejna postaje sve veće. Kada se napon v_{DS} izjednači sa naponom $v_{GS} - V_t$ u okolini drejna prestaje da važi uslov za formiranje kanala, pa se dubina kanala u okolini drejna približno svede na nulu, odnosno kaže se da je kanal stisnut, slika 9.4 Daljim povećanjem vrednosti napona v_{DS} iznad $v_{GS} - V_t$ oblik kanala se skoro ne menja, tako da se struja drejna zaustavlja na nekoj vrednosti, odnosno, kaže se da je došlo do *zasićenja* struje drejna. Povećanje napona v_{GS} , a da je pri tome kanal i dalje stisnut na strani drejna, dovešće do širenja kanala na strani sorsa i većoj prosečnoj dubini kanala, slika 9.4 što će dovesti do veće struje drejna, ali ta struja i dalje neće zavisiti od napona v_{DS} . Dakle, kroz komponentu protiče struja koja ne zavisi od razlike potencijala na krajevima komponente, što znači da se radi o strujnom izvoru, u ovom slučaju kontrolisanom naponom v_{GS} .

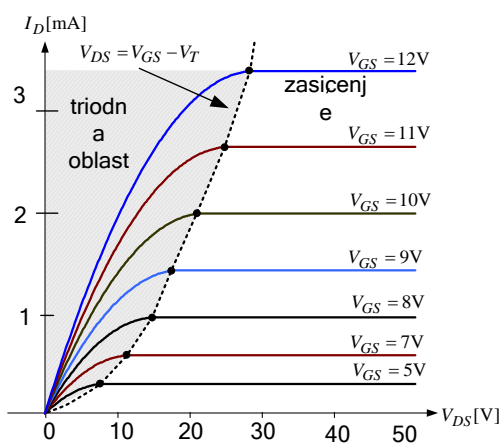
Oblast rada NMOS tranzistora u režimu većih napona $v_{DS} > v_{GS} - V_t$ naziva se *oblast zasićenja*. Struja drejna u režimu zasićenja se može dobiti iz prethodne jednačine za struju u triodnoj oblasti ako što se izvrši smena $v_{DS} = v_{GS} - V_t$, čime se dobija:

$$i_D = \frac{B}{2} (v_{GS} - V_t)^2 \quad (9.2)$$

Na slici 9.5 su date statičke izlazne karakteristike NMOS tranzistora koje ilustruju zavisnost struje drejna od napona v_{DS} pri različitim vrednostima napona v_{GS} .



Slika 9.4.



Slika 9.5 Izlazne karakteristike NMOS tranzistora.

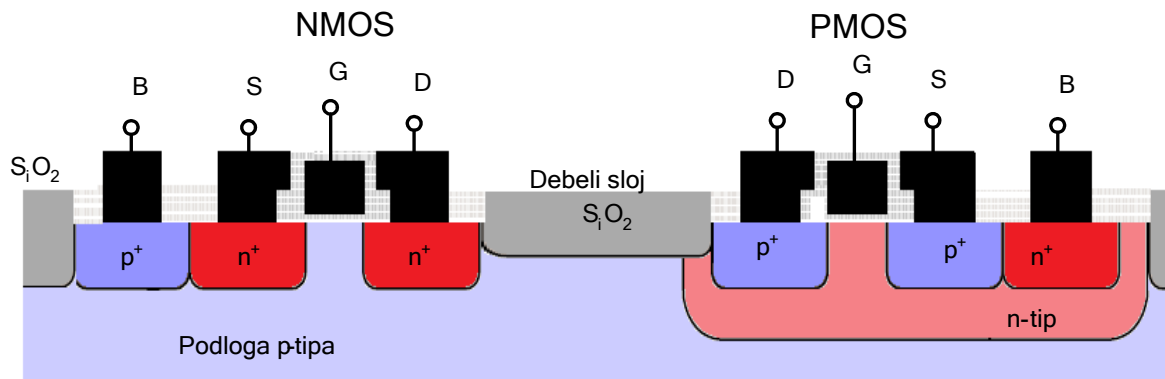
9.3 PMOS tranzistor i komplementarni MOS (CMOS)

MOS tranzistor sa p kanalom se pravi na podlozi n tipa sa p^+ oblastima za sors i drejn. Princip rada mu je potpuno isti kao kod NMOS tranzistora, jedino se polaritet svih napona i struja razlikuje. Dakle, naponi v_{GS} , v_{DS} i V_t su negativni, a struja drejna i_D ima smer prema sorsu i izlazi iz drejna. U izrazima za struju umesto pokretljivosti elektrona μ_n figuriše pokretljivost šupljina μ_p .

Tehnologija izrade PMOS tranzistora je starija od tehnologije izrade NMOS tranzistora i nekada je bila dominantna. Međutim, danas su dominantni NMOS tranzistori. Razlog za to su njihove bolje karakteristike. Pošto je pokretljivost elektrona μ_n oko 2.5 puta veća od pokretljivosti šupljina, struja NMOS tranzistora je oko 2.5 veća pri istim uslovima od struje istog PMOS tranzistora. Zbog toga NMOS tranzistori mogu biti manji i raditi sa manjim naponima napajanja. Pa ipak, PMOS tranzistori se još uvek koriste kao diskretni tranzistori, a u integrisanim kolima u okviru komplementarnih MOS ili CMOS kola.

Komplementarna MOS ili CMOS kola sadrže tranzistore oba tipa na istoj osnovi. U tehnologiji sa osnovom p tipa NMOS tranzistor se realizuje direktno na osnovi, dok se PMOS

tranzistor realizuje u posebno napravljenom n oblasti, koja predstavlja njegovu osnovu, slika 9.6. Oba tranzistora su međusobno izolovana debelim slojem oksida. Iako su komplikovanija za proizvodnju od NMOS kola, CMOS kola su najkorisnija savremena MOS kola i koriste se u realizaciji i digitalnih i analognih kola.



Slika 9.6: Struktura CMOS kola.

9.4 Model NMOS tranzistora za velike signale

Kao što je objašnjeno u prethodnim odeljcima, zavisno od napona na elektrodama MOS tranzistor se može naći u tri režima rada: zakočenju, triodnoj oblasti i zasićenju. U ovom odeljku će malo detaljnije biti razmatrani uslovi rada u sve tri pobrojane oblasti i biće izvedeni odgovarajući ekvivalentni električni modeli NMOS tranzistora za velike signale.

9.4.1 NMOS tranzistor u zakočenju

NMOS tranzistor je zakočen kada nema uslova za formiranje kanala. Dakle, da bi tranzistor bio zakočen, treba da bude $v_{GS} < V_t$. Tada između drejna i sorsa, umesto kanala, postoje dve diode od kojih je uvek jedna inverzno polarisana. Pošto je otpornost između sorsa i drejna reda $10^{12} \Omega$, a gejt je izolovan, može se smatrati da se ceo MOS tranzistor može zameniti otvorenim vezama.

9.4.2 NMOS tranzistor u triodnoj oblasti

Kada je napon na gejtu dovoljno veliki za formiranje kanala, $v_{GS} \geq V_t$, a napon između sorsa i drejna dovoljno mali, $v_{DS} \leq v_{GS} - V_t$, NMOS tranzistor radi u triodnoj oblasti. U jednačini za struju drejna:

$$i_D = \frac{B}{2} [2(v_{GS} - V_t)v_{DS} - v_{DS}^2] \quad (9.3)$$

se za male napone v_{DS} na primer pri $5v_{DS} \leq v_{GS} - V_t$, može zanemariti kvadratni član, čime se formula 9.3 svodi na oblik:

$$i_D \approx B(v_{GS} - V_t)v_{DS} \quad (9.4)$$

Dakle, u triodnoj oblasti se NMOS tranzistor ponaša kao otpornik, čija vrednost zavisi od kontrolnog napona v_{GS} :

$$r_{DS} = \frac{v_{DS}}{i_D} = \frac{1}{B(v_{GS} - V_t)} \quad (9.5)$$

Ova osobina MOS tranzistora se često koristi u elektronskim kolima za realizaciju programabilnih naponski kontrolisanih otpornika.

9.4.3 NMOS tranzistor u zasićenju

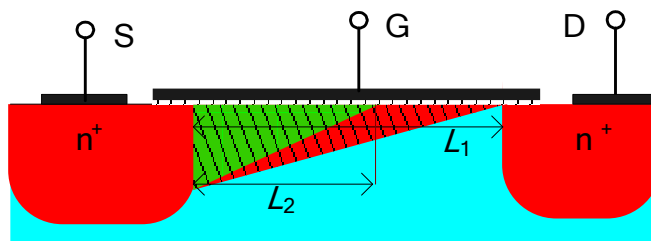
Kada je napon na gejtu dovoljno veliki za formiranje kanala, $v_{GS} \geq V_t$, a napon između sorsa i drejna dovoljno veliki, $v_{DS} \geq v_{GS} - V_t$, NMOS tranzistor radi u oblasti zasićenja. Jednačina za struju drejna:

$$i_D = \frac{B}{2}(v_{GS} - V_t)^2 \quad (9.6)$$

pokazuje da se NMOS tranzistor u oblasti zasićenja može predstaviti kao idealni zavisni strujni izvor kontrolisan naponom v_{GS} .

9.4.4 Erlijev efekat

Erlijev efekat kod MOS tranzistora u oblasti zasićenja dovodi do toga da struja drejna raste sa porastom napona v_{DS} . Efekat nastaje kao posledica pomeranja prema sorsu tačke u kojoj je kanal stisnut, slika 9.7. Kada je napon $v_{DS} = v_{GS} - V_t$ kraj kanala će biti stisnut i efektivna dužina kanala L_1 biće jednaka geometrijskoj dužini kanala. Kada je $v_{DS} > v_{GS} - V_t$ stisnuti kraj kanala će se pomeriti prema sorsu i efektivna dužina kanala L_2 biće manja od L_1



Slika 9.7: Erlijev efekat u NMOS tranzistoru

Efektivna dužina skraćenog kanala dobija se korekcijom dužine kanala preko parametra λ :

$$L_{eff} = L / (1 + \lambda \cdot v_{DS}). \quad (9.7)$$

Na osnovu toga korigovana jednačina za struju drejna NMOS tranzistora u zasićenju glasi:

$$I_D = \frac{\mu_n C_{ox}}{2} \frac{W}{L_{eff}} (v_{GS} - V_t)^2 (1 + \lambda \cdot v_{DS}) = \frac{\mu_n C_{ox}}{2} \frac{W}{L} (v_{GS} - V_t)^2 (1 + \lambda \cdot v_{DS}), \quad (9.8)$$

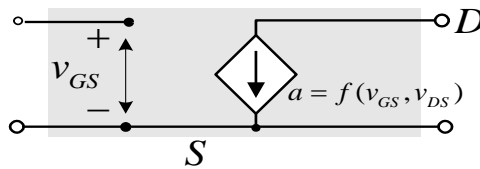
odnosno:

$$I_D = \frac{B}{2}(v_{GS} - V_t)^2 (1 + \lambda \cdot v_{DS}). \quad (9.9)$$

Iako je Erlijev efekat kod MOS tranzistora kritičniji nego u slučaju bipolarnih tranzistora, u prvoj aproksimaciji MOS pojačavačkih kola on se zanemaruje. U nastavku knjige, osim ukoliko se ne naglasi suprotno, Erlijev efekat će se zanemarivati, tj. podrazumeva se da je $\lambda = 0$.

9.4.5 Ekvivalentna šema modela za veliki signal NMOS tranzistora

Iz prethodnih razmatranja proizilazi da se NMOS tranzistor u može predstaviti kao kontrolisani zavisni strujni izvor, slika 9.8, čija struja zavisi od nekoliko parametara kao i režima rada, što je dato skupom formula 9.10.



Slika 9.8: Ekvivalentni model NMOS tranzistora za velike signale.

$$a = \begin{cases} \approx 0, & v_{GS} < V_t \\ \frac{B}{2}(v_{GS} - V_t)^2 (1 + \lambda \cdot v_{DS}) \approx \frac{B}{2}(v_{GS} - V_t)^2, & V_{GS} > V_t, v_{DS} \geq v_{GS} - V_t \\ \frac{B}{2}[2(v_{GS} - V_t)v_{DS} - v_{DS}^2], & v_{GS} > V_t, v_{DS} < v_{GS} - V_t \end{cases} \quad (9.10)$$

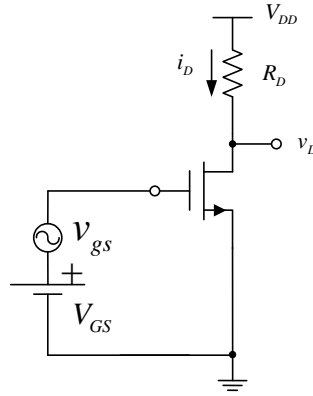
9.5 Model NMOS tranzistora za male signale

Kao i kod bipolarnog tranzistora, model MOS tranzistora se može dobiti korišćenjem pretpostavke da se pobudni signal može razložiti na dve komponente: konstantnu, koja određuje radnu tačku, i promenljivu, koja predstavlja signal koji treba pojačati. Svi naponi i struje u kolu se onda mogu razložiti na konstantne i promenljive komponente. Sa konstantnim komponentama se operiše korišćenjem modela za velike signale, a za određivanje promenljivih komponentata se koristi model za male signale.

Da bi se NMOS tranzistor koristio kao pojačavač, njegova radna tačka mora biti u oblasti zasićenja. Dakle, za određivanje radne tačke tranzistora u kolu sa slike 9.9 može se pretpostaviti da je promenljivi signal jednak nuli, $v_{gs} = 0$, i napisati sistem jednačina za jednosmerni režim:

$$i_D = \frac{B}{2}(v_{GS} - V_t)^2 \quad (9.11)$$

$$v_D = V_{DD} - R_D i_D \quad (9.12)$$



Slika 9.9: Osnovno pojačavačko kolo sa NMOS tranzistorom.

Zatim se pretpostavi da postoji i promenljivi signal v_{gs} , odnosno da je ukupna pobuda:

$$v_{GS} = V_{GS} + v_{gs} \quad (9.13)$$

koja daje ukupnu struju drejna:

$$i_D = \frac{B}{2} (V_{GS} + v_{gs} - V_t)^2 = \frac{B}{2} [(V_{GS} - V_t)^2 + 2(V_{GS} - V_t)v_{gs} + v_{gs}^2] \quad (9.14)$$

Prvi član u ovoj jednačini odgovara konstantnoj struji drejna u MRT. Drugi član predstavlja komponentu struje koja je direktno proporcionalna promenljivom delu pobudnog napona, i koji je koristan sa gledišta pojačanja. Treći član je srazmeran kvadratu promenljivog dela pobudnog napona i predstavlja nepoželjan efekat, tzv. nelinearna izobličenja. Da bi se nelinearna izobličenja smanjila, potrebno je da promenljivi pobudni signal bude dovoljno mali:

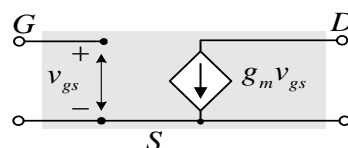
$$v_{gs} \ll 2(V_{GS} - V_t) \quad (9.15)$$

i tada se ukupna struja drejna može napisati u obliku:

$$i_D \approx I_D + i_d = \frac{B}{2} (V_{GS} - V_t)^2 + B(V_{GS} - V_t)v_{gs} \quad (9.16)$$

Dakle, NMOS tranzistor se za male signale može modelovati idealnim strujnim izvorom zavisnim od napona, što je prikazano na slici 9.6. Parametar g_m , koji povezuje signale i_d i v_{gs} , naziva se *transkonduktansa MOSFET-a* i definisan je izrazom:

$$g_m = \frac{i_d}{v_{gs}} = B(V_{GS} - V_t) = \frac{2I_D}{V_{GS} - V_t} = \sqrt{2BI_{DQ}} \quad (9.17)$$



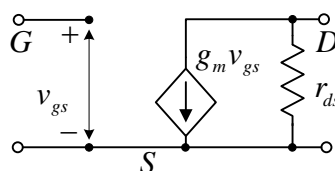
Slika 9.10: Model NMOS tranzistora za male signale.

Interesantno je primetiti da su modeli za male signale bipolarnog tranzistora i NMOS tranzistora slični. Jedna od razlika je što u modelu bipolarnog tranzistora u ulaznom delu kola figuriše otpornost r_π , koje nema u modelu MOS tranzistora. Zbog toga će ulazna otpornost kola sa MOS tranzistorom, gledano sa strane gejta, uvek biti mnogo veća nego kod kola sa bipolarnim tranzistorom. Druga razlika se odnosi na vrednost transkonduktanse g_m , koja je pri istoj struji znatno veća kod bipolarnog tranzistora za slične dimenzije i ostale parametre. Na primer, ako je $I_D = 1 \text{ mA}$, $V_{GS} - V_t = 1 \text{ V}$, onda je za bipolarni tranzistor $g_m \approx 40 \text{ mA/V}$, a za NMOS tranzistor $g_m \approx 2 \text{ mA/V}$.

Ukoliko je potrebno modelovati i Erlijev efekat, tada se paralelno strujnom izvoru dodaje i otpornik r_{ds} koji se dobija diferenciranjem jednačine 9.11:

$$r_{ds} = \frac{1}{\partial i_D / \partial v_{DS}} \Big|_{v_{GS}=V_{GS}} = \frac{1}{\lambda \frac{B}{2} (V_{GS} - V_t)^2} = \frac{1}{\lambda I_D} \quad (9.18)$$

Model za mali signal sa uključenim Erlijevim efektom dat je na slici 9.11



Slika 9.11: Model NMOS tranzistora za male signale sa uključenim Erlijevim efektom

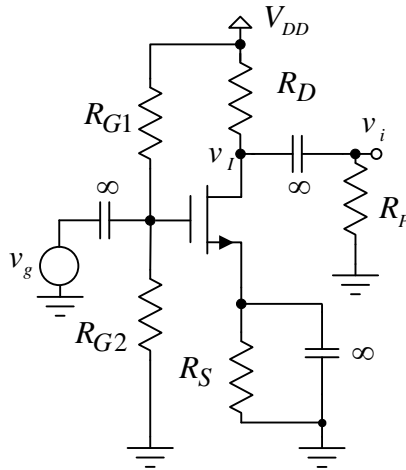
Isto kao u slučaju bipolarnog tranzistora, kada se naglašava da se radi o električnim veličinama u MRT, dodaje se slovo Q u indeksu.

9.6 Osnovna pojačavačka kola sa NMOS tranzistorom

Ekvivalentno bipolarnom tranzistoru gde se promenljivi signal uvek dovodi između baze i emitora, promenljivi ulazni signal kod MOS tranzistora se uvek mora dovesti između elektroda gejta i sorsa. Pri tome se izlaz može uzeti bilo sa drejna bilo sa sorsa. Zavisno od toga koja je od elektroda MOS tranzistora na konstantnom potencijalu, razlikuju se tri osnovne konfiguracije: *pojačavač sa zajedničkim sorsom*, *pojačavač sa zajedničkim drejnom* i *pojačavač sa zajedničkim gejtom*.

9.6.1 Pojačavač sa zajedničkim sorsom (ZS), polarizacija i pojačanje za mali signal

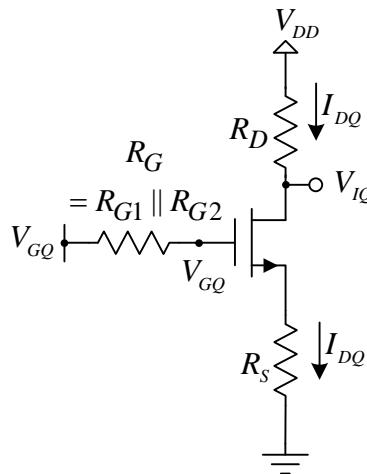
Pojačavač sa zajedničkim (uzemljenim) sorsom, kapacitivno spregnut sa prošačem, prikazan je na slici 9.11. Vidi se da je pobuda priključena između gejta i sorsa (mase za mali signal), a da se izlazni napon uzima između drejna i sorsa (mase za mali signal). Na učestanosti malog signala kondenzatori u kolu se mogu smatrati kratkim spojevima.



Slika 9.12: Pojačavač sa zajedničkim sorsom.

Otpornici u gejtju služe za podešavanje MRT, odnosno napona V_{GSQ} i struje I_{DQ} . Pošto nema struje gejta, razdelnik napona je neopterećen, tako da ovi otpornici mogu imati znatno veće vrednosti nego kod pojačavača sa bipolarnim tranzistorom.

Ekvivalentno kolo koje može da se iskoristi za DC analizu i određivanje MRT prikazano je na slici 9.13.



Slika 9.13. Šema ZS pojačavača u mirnoj radnoj tački

Napon na gejtju je definisan razdelnikom napona:

$$V_{GQ} = V_{DD} \frac{R_{G2}}{R_{G2} + R_{G1}} \quad (9.19)$$

Kako je struja sorsa jednaka struji drejna, moguće je postaviti jednačinu

$$R_S I_{DQ} + V_{GSQ} = V_{GQ} \quad (9.20)$$

U prethodnoj jednačini struja drejna se zameni izrazom za struju drejna u funkciji od napona V_{GSQ} :

$$-V_{GQ} + R_s \frac{B}{2} (V_{GSQ} - V_t)^2 + V_{GSQ} = 0 \quad (9.21)$$

Dobijena je kvadratna jednačina čijim se rešavanjem može da odredi V_{GSQ} . U većini slučajeva kvadratnu jednačinu je pogodnije rešavati po promenljivoj $V_x = V_{GSQ} - V_t$: U funkciji te promenljive kvadratna jednačina glasi:

$$R_s \frac{B}{2} (V_{GSQ} - V_t)^2 + (V_{GSQ} - V_t) - (V_{GQ} - V_t) = 0, \quad (9.22)$$

odnosno

$$R_s \frac{B}{2} V_x^2 + V_x - V_Y = 0 \quad (9.23)$$

gde je $V_Y = V_{GQ} - V_t$ unapred izračunato. Kada je poznato V_x , na osnovu njega se računa MRT:

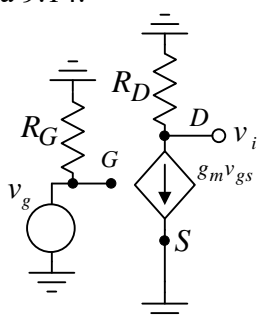
$$I_{DQ} = \frac{B}{2} V_x^2; \quad V_{IQ} = V_{DQ} = V_{DD} - R_D I_{DQ}; \quad V_{SQ} = R_s I_{DQ} \quad (9.24)$$

Ukoliko je ispunjeno da je $V_{DSQ} = V_{DQ} - V_{SQ} > V_x$ tranzistor je u zasićenju i može mu se odrediti transkonduktansa:

$$g_m = B(V_{GSQ} - V_t) = B \cdot V_x. \quad (9.25)$$

Kao i u slučaju osnovnih pojačavačkih sprega sa bipolarnim tranzistorima, šema sa slike 9.13 može da posluži za određivanje MRT i u slučajevima ZD i ZG konfiguracija.

Parametri pojačavača za mali signal nalaze se zamenom modela tranzistora za mali signal u šemu pojačavača za mali signal, slika 9.14.



Slika 9.14 Model za mali signal ZS pojačavača

Kako je pobudni generator spojen direktno na gejt, naponsko pojačanje se dobija direktno:

$$a_v = \frac{v_i}{v_g} = \frac{-g_m v_{gs} R_D}{v_g} = -g_m R_D. \quad (9.26)$$

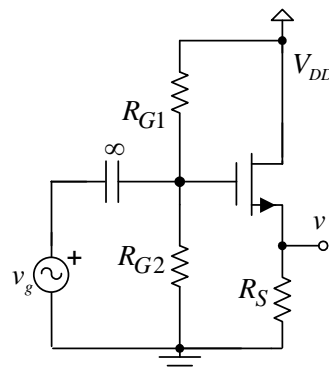
Ukoliko se ukloni kondenzator koji je u paraleli sa otpornikom u sorsu moduo pojačanja će se smanjiti:

$$a_v = -\frac{g_m R_D}{1 + g_m R_S} < 1. \quad (9.27)$$

Dakle, pojačavač sa zajedničkim sorsom ima veliko naponsko pojačanje i obrće fazu. Ulazna otpornost je R_G , a izlazna R_D .

9.6.2 Pojačavač sa zajedničkim drejnom (ZD)

Kod pojačavača sa zajedničkim (uzemljenim) drejnom, koji je prikazan na slici 9.15, drejn je vezan direktno na bateriju za napajanje, odnosno vezan je na masu za promenljivi signal. Pobuda je priključena između gejta i drejna (mase), a izlazni napon se uzima između sorsa i drejna (mase).



Slika 9.15: Pojačavač sa zajedničkim drejnom.

Posle zamene MOS tranzistora modelom za male signale i kraćeg izračunavanja dobija se izraz za naponsko pojačanje:

$$a_v = \frac{v_i}{v_g} = \frac{g_m R_S}{1 + g_m R_S} \approx 1 \quad (9.28)$$

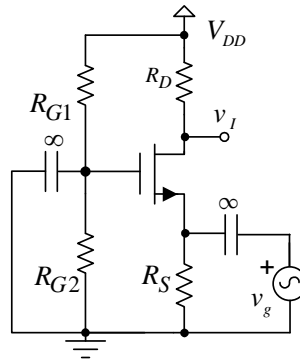
Vidi se da pojačavač sa zajedničkim drejnom ima približno jedinično naponsko pojačanje i ne obrće fazu. Ulazna otpornost je R_G , dok se za izlaznu otpornost lako dobija:

$$r_i = R_S \parallel \frac{1}{g_m} = \frac{R_S}{1 + g_m R_S} \quad (9.29)$$

odnosno, *izlazna otpornost pojačavača sa zajedničkim drejnom je mala.*

9.6.3 Pojačavač sa zajedničkim gejtom (ZG)

Kod pojačavača sa zajedničkim (uzemljenim) gejtom, koji je prikazan na slici 9.16, gejt je vezan na konstantan napon iz razdelnika napona, odnosno vezan je na masu za promenljivi signal. Pobuda je priključena između sorsa i gejta (mase), a izlazni napon se uzima između drejna i gejta (mase).



Slika 9.16: Pojačavač sa zajedničkim gejtom.

Kako je za mali signal gejt na masi, a sors je direktno povezan na pobudu, napon v_{gs} je jednak naponu pobudnog generatora $v_{gs} = -v_g$ pa je naponsko pojačanje jednako

$$a_v = \frac{v_i}{v_g} = \frac{-g_m v_{gs} R_D}{v_g} = \frac{-g_m (-v_g) R_D}{v_g} = g_m R_D \quad (9.30)$$

Izlazna otpornost je jednaka R_D dok je ulazna otpornost jednaka izlaznoj otpornosti ZD pojačavača. Dakle, *pojačavač sa zajedničkim drejnom ima naponsko pojačanje veće od jedinice i ne obrće fazu, dok mu je ulazna otpornost mala.*

Slično kao u slučaju ZB pojačavača, ako je $R_S \gg 1/g_m$ i ako je pobuda strujna, strujno pojačanje ovog pojačavača je jednako jedinici i on može da se koristi kao strujni bafer.

10 Složena pojačavačka kola

Ako posmatramo pojačavač sa zajedničkim sorsom vidimo da je njegovo naponsko pojačanje znatno manje od pojačanja pojačavača sa zajedničkim emitorom. To je posledica činjenice da je transkonduktansa MOS tranzistora znatno manja od transkonduktanse bipolarnog tranzistora. Da bi se povećalo naponsko pojačanje, trebalo bi povećati vrednost otpornika R_D . Međutim, ako napon napajanja ostane isti, povećanje otpornosti R_D izazvaće smanjenje struje I_D i smanjenje transkonduktanse g_m . Dakle, pojačanje će se samo malo povećati sa povećanjem otpornosti R_D . Slična je situacija i kod pojačavača sa zajedničkim emitorom, ali se kod njega ipak može realizovati nešto veće pojačanje.

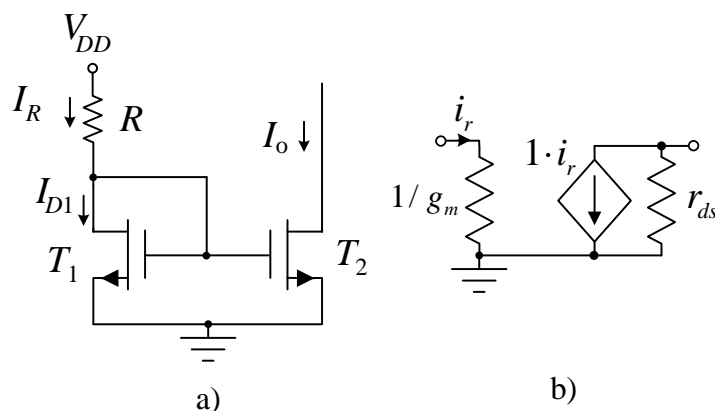
Postoji još jedan nedostatak opisanih pojačavača sa MOS tranzistorima kada se pojačavačka kola realizuju u tehnologiji integrisanih kola. Dimenzije integrisanih otpornike su nekoliko puta, pa čak i nekoliko desetina puta, veće od dimenzija MOS tranzistora. Prema tome, upotreba otpornika smanjuje broj komponentata koje se mogu realizovati na zadatoj površini.

Treći nedostatak svih opisanih konfiguracija sa jednim tranzistorom je što se koriste kondenzatori za spregu sa pobudnim izvorom kao i sa narednim pojačavačkim stepenom. Oni su neophodni da se ne bi poremetila radna tačka tranzistora priključivanjem pobude ili narednog stepena. Takvi kondenzatori treba da budu velike kapacitivnosti da ne bi slabili signale na niskim učestanostima. U realizacijama sa diskretnim komponentama, ovi kondenzatori ne predstavljaju problem. Međutim, u integrisanoj tehnologiji nije moguće realizovati kondenzatore velikog kapaciteta na silicijumskoj pločici, pa se mora tražiti neko alternativno rešenje.

Navedeni razlozi doveli su do razvoja novih kola, koja treba da imaju veliko pojačanje uz istovremeno malo zauzeće površine integrisanih kola. Takva kola sadrže samo tranzistore i dominantna su u savremenoj tehnologiji MOS integrisanih kola. Osnovna ideja je da se otpornik zameni sa strukturom koja sadrži jedan ili više tranzistora. Takva struktura treba da obezbedi veliku dinamičku otpornost, uz istovremeno zadržavanje radne tačke pojačavačkog tranzistora.

10.1 Strujni izvori

Realizacije pojačavača u integrisanoj tehnologiji intenzivno koriste strujne izvore. Jedna jednostavna realizacija strujnog izvora poznata pod nazivom *strujno ogledalo* je pokazana na slici 10.1 a).



Slika 10.1: a) Strujno ogledalo sa NMOS tranzistorima. b) model za mali signal

Pošto je kod tranzistora T_1 drejn spojen sa gejtom, tranzistor T_1 mora biti u režimu zasićenja, jer je $v_{DS} = v_{GS} > v_{GS} - V_t$. Struja kroz tranzistor T_1 (referentna struja) iznosi:

$$I_{D1} = \frac{B_1}{2}(V_{GS} - V_t)^2 = I_R = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R} = \frac{V_{DD} - V_{GS}}{R} \quad (10.1)$$

Jednačina može da se transformiše da bude u funkciji promenljive $V_X = V_{GS} - V_t$. Tada kvadratna jednačina glasi:

$$R \frac{B_1}{2}(V_{GS} - V_t)^2 + (V_{GS} - V_t) - (V_{DD} - V_t) = 0, \quad (10.2)$$

odnosno

$$R \frac{B_1}{2} V_X^2 + V_X - V_Y = 0 \quad (10.3)$$

gde je $V_Y = V_{DD} - V_t$ unapred izračunato. Kada je poznato V_X , na osnovu njega se računa referentna struja:

$$I_{DQ} = \frac{B_1}{2} V_X^2 \quad (10.4)$$

Za tranzistor T_2 važi da je

$$I_O = I_{D2} = \frac{B_2}{2}(V_{GS} - V_t)^2 \quad (10.5)$$

Pošto tranzistori T_1 i T_2 imaju isti napon V_{GS} , količnik izlazne i referentne struje iznosi

$$\frac{I_O}{I_R} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{W_2/L_2}{W_1/L_1} \quad (10.6)$$

Odnos I_O/I_R se naziva *strujno pojačanje strujnog izvora*.

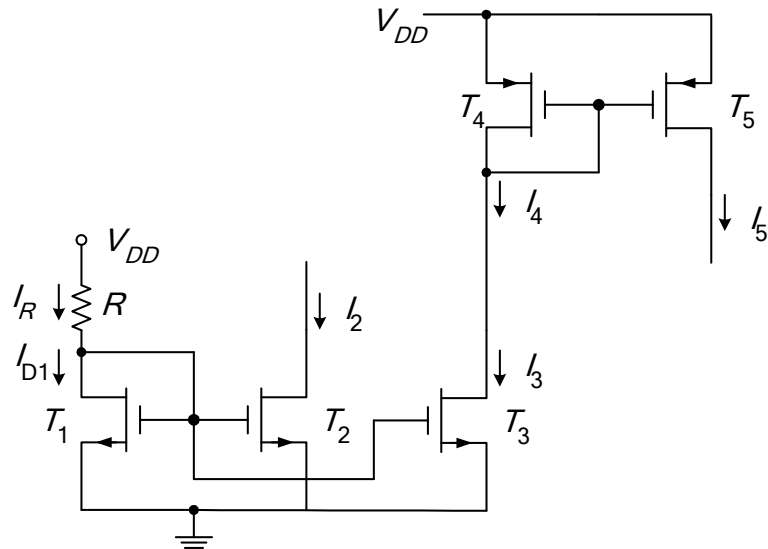
Dakle, izborom referentne struje I_R i postavljanjem radne tačke prvog tranzistora da obezbedi tu struju, može se obezbediti željena izlazna struja podešavanjem geometrijskih dimenzija oba tranzistora. Ako su tranzistori identični, onda je $I_O = I_R$, pa je ovakvo kolo dobilo naziv *strujno ogledalo*.

Da bi se opisano kolo ponašalo kao strujni izvor, neophodno je da tranzistor T_2 radi u zasićenju, čime je obezbeđena velika izlazna otpornost. Dakle, kolo na koje se priključuje strujni izvor mora obezbediti minimalni napon na drejnu drugog tranzistora:

$$V_{D2} \geq V_{GS} - V_t \quad (10.7)$$

Ako se zanemari Erlijev efekat kolo je strujno ogledalo i za mali i za veliki signal. U slučaju da Erlijev efekat ne može da se zanemari, strujni izvor u strujnom ogledalu ima izlaznu otpornost r_{ds} , slika 10.1 b).

Na jedan referentni tranzistor T_1 se može vezati više različitih tranzistora T_1, T_2, \dots , čime se može dobiti više različitih konstantnih struja u istom kolu. Takođe, upotrebom PMOS tranzistora, može se ostvariti izlazna struja suprotnog smera. Oba ova principa su ilustrovana na slici 10.2.



Slika 10.2: Strujni izvori sa NMOS i PMOS tranzistorima.

Za kolo na slici 10.2 lako se mogu napisati jednačine:

$$I_2 = I_R \frac{W_2/L_2}{W_1/L_1} \quad (10.8)$$

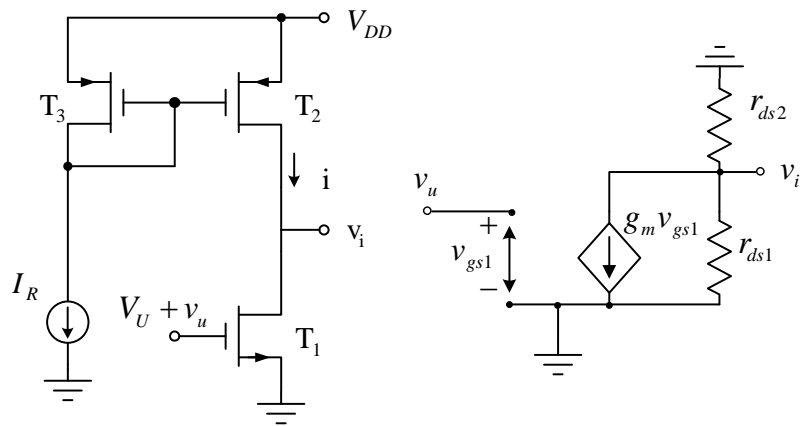
$$I_3 = I_R \frac{W_3/L_3}{W_1/L_1} = I_4 \quad (10.9)$$

$$I_5 = I_4 \frac{W_5/L_5}{W_4/L_4} = I_R \frac{W_3/L_3}{W_1/L_1} \frac{W_5/L_5}{W_4/L_4} \quad (10.10)$$

koje daju odnose struja strujnih izvora i referentne struje.

10.2 Pojačavač sa dinamičkim (aktivnim) opterećenjem

Strujni izvori, opisani u prethodnom odeljku, se mogu korisno upotrebiti za realizaciju pojačavača sa većim pojačanjem nego što se može ostvariti konfiguracijama sa otpornim opterećenjem. Naime, strujni izvori daju konstantnu jednosmernu struju, kojom se može podesiti pogodna radna tačka pojačavačkog tranzistora. S druge strane, strujni izvori imaju veliku (teorijski beskonačnu) izlaznu otpornost, čime simuliraju veliko opterećenje pojačavačkog tranzistora. Ako je pojačavački tranzistor NMOS tipa onda strujni izvor, koji treba da zameni otpornik u kolu drejna, mora da daje struju i mora biti realizovan sa PMOS tranzistorima. Kompletna šema pojačavača sa zajedničkim sorsom i strujnim izvorom kao dinamičkim opterećenjem je prikazana na slici 10.3.



Slika 10.3: Pojačavač sa zajedničkim sorsom u CMOS tehnologiji i model pojačavača za mali signal.

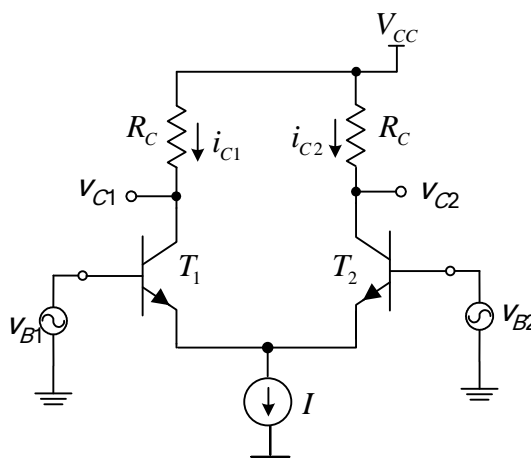
Upotrebom modela tranzistora za mali signal u kome je uključen Erlijev efekat, smatrajući da su parametri λ isti kod NMOS i PMOS tranzistora, za naponsko pojačanje pojačavača sa zajedničkim sorsom sa slike 10.3 dobija se tačniji izraz:

$$a_v \approx -g_{m1}(r_{DS1} \parallel r_{DS2}) \approx -\sqrt{\frac{B}{2I_R}} \frac{1}{\lambda} = -\sqrt{\frac{B}{2I_R}} \cdot V_A \quad (10.11)$$

gde je $V_A = 1/\lambda$ napon koji određuje nagib krive $i_D = f(v_{DS})$, kao što je to bio slučaj kod bipolarnog tranzistora slika 8.15. Isti princip se može iskoristiti i za poboljšanje karakteristika konfiguracija sa zajedničkim gejtom ili drejnom.

10.3 Diferencijalni pojačavač

Diferencijalni pojačavač je jedno od najkorisnijih pojačavačkih kola. U osnovnoj verziji se sastoji od dva tranzistora (bipolarna ili MOS), dva otpornika i strujnog izvora. U složenijim verzijama, sa boljim karakteristikama, otpornici su zamenjeni strujnim izvorima. Osnovno kolo diferencijalnog pojačavača sa bipolarnim tranzistorima je prikazano na slici 10.4.



Slika 10.4: Osnovno kolo diferencijalnog pojačavača sa bipolarnim tranzistorima.

Za kolo na slici 10.4 se mogu napisati jednačine za emitorske struje oba tranzistora:

$$i_{E1} = I_{ES} e^{(v_{B1} - v_E)/V_T} \quad (10.12)$$

$$i_{E2} = I_{ES} e^{(v_{B2} - v_E)/V_T} \quad (10.13)$$

iz kojih se lako dobijaju njihov odnos i zbir:

$$\frac{i_{E1}}{i_{E2}} = e^{(v_{B1} - v_{B2})/V_T} \quad (10.14)$$

$$i_{E1} + i_{E2} = I \quad (10.15)$$

odakle sledi:

$$i_{E1} = \frac{I}{1 + e^{(v_{B2} - v_{B1})/V_T}} \quad (10.16)$$

$$i_{E2} = \frac{I}{1 + e^{(v_{B1} - v_{B2})/V_T}} \quad (10.17)$$

Pojačanje diferencijalnog pojačavača za male signale se dobija kada se na kolo primeni mali diferencijalni napon $v_d = v_{B1} - v_{B2}$. Onda se za kolektorske struje oba tranzistora dobija:

$$i_{C1} = \frac{\alpha I}{1 + e^{-v_d/V_T}} = \frac{\alpha I e^{v_d/2V_T}}{e^{v_d/2V_T} + e^{-v_d/2V_T}} \approx \frac{\alpha I \left(1 + \frac{v_d}{2V_T}\right)}{\left(1 + \frac{v_d}{2V_T}\right) + \left(1 - \frac{v_d}{2V_T}\right)} = \quad (10.18)$$

$$= \frac{\alpha I}{2} + \frac{\alpha I}{2V_T} \frac{v_d}{2} = I_C + g_m \frac{v_d}{2}$$

$$i_{C2} = \frac{\alpha I}{1 + e^{v_d/V_T}} = \frac{\alpha I}{2} - \frac{\alpha I}{2V_T} \frac{v_d}{2} = I_C - g_m \frac{v_d}{2} \quad (10.19)$$

pa su naponi na kolektorima tranzistora:

$$v_{C1} = (V_{CC} - R_C I_C) - g_m R_C \frac{v_d}{2} = V_{C1} + v_{c1} \quad (10.20)$$

$$v_{C2} = (V_{CC} - R_C I_C) + g_m R_C \frac{v_d}{2} = V_{C2} + v_{c2} \quad (10.21)$$

Za diferencijalni pojačavač se mogu definisati dve vrste pojačanja. Jedno je *diferencijalno pojačanje*, čiji je definicioni izraz:

$$a_d = \frac{v_{c1} - v_{c2}}{v_d} \approx -g_m R_C \quad (10.22)$$

a drugo je *pojačanje srednje vrednosti* definisano izrazom:

$$a_s = \frac{v_{C1} - v_{C2}}{\frac{v_{B1} + v_{B2}}{2}} \approx 0 \quad (10.23)$$

u slučaju kada je kolo potpuno simetrično i naponi na ulazima jednaki. Ako postoji mala razlika između otpornika u kolu kolektora, pojačanje srednje vrednosti biće različito od nule:

$$a_s \approx \frac{\Delta R_C}{2R} = \frac{R_C}{2R} \frac{\Delta R_C}{R_C} \quad (10.24)$$

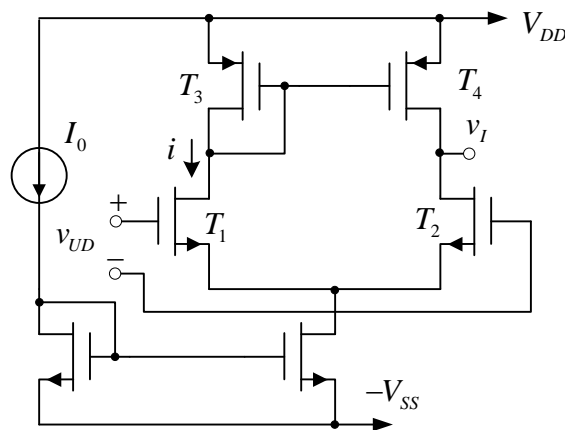
gde je R izlazna otpornost strujnog izvora koja je vrlo velika. Zato je pojačanje srednje vrednosti uvek malo.

U opštem slučaju je:

$$v_i = a_d(v_{B1} - v_{B2}) + a_s \left(\frac{v_{B1} + v_{B2}}{2} \right) \quad (10.25)$$

Diferencijalna ulazna otpornost za mali signal je $2r_\pi$, dok je diferencijalna izlazna otpornost $2R_C$, a jednostruka samo R_C .

Diferencijalni pojačavač sa MOS tranzistorima bi se mogao realizovati na isti način kao na slici 10.4 zamenom bipolarnih tranzistora NMOS tranzistorima. Međutim, zbog toga što otpornici u kolu drejna ne smeju da budu veliki zbog obezbeđenja dovoljne jednosmerne struje drejna, kao i zbog toga što je transkonduktansa MOS tranzistora znatno manja od transkonduktanse bipolarnih tranzistora, pojačanje takvog diferencijalnog pojačavača bilo bi suviše malo, a njegova realizacija u integrisanoj tehnici neefikasna zbog korišćenja otpornika. Zato se u integrisanoj tehnici uvek primenjuje nešto složenija realizacija diferencijalnog pojačavača sa strujnim izvorima kao dinamičkim opterećenjem pojačavačkih tranzistora, koja je prikazana na slici 10.5.



Slika 10.5: Diferencijalni pojačavač sa MOS tranzistorima.

Rad kola diferencijalnog pojačavača sa MOS tranzistorima može se u potpunosti objasniti analogijama sa kolom sa bipolarnim tranzistorima. Neka su svi tranzistori istog tipa identični. Promenljivi deo struje drejna tranzistora T_1 dat je izrazom:

$$i = g_m \frac{v_{ud}}{2} \quad (10.26)$$

Pošto je za svaki tranzistor u diferencijalnom paru struja u mirnoj radnoj tački:

$$I_D = \frac{I_0}{2} \quad (10.27)$$

onda je:

$$g_m = \frac{I_0}{V_{GS} - V_t} \quad (10.28)$$

pa je izlazni napon dat izrazom:

$$v_i = 2i(r_{DS2} \parallel r_{DS4}) \quad (10.29)$$

Ako je:

$$r_{DS2} = r_{DS4} = r_o = \frac{V_A}{I_0/2} \quad (10.30)$$

izlazni napon postaje:

$$v_i = 2i \frac{r_o}{2} = ir_o = g_m \frac{v_{ud}}{2} r_o \quad (10.31)$$

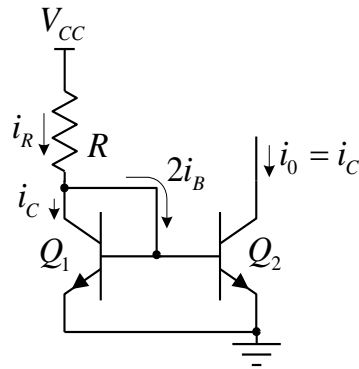
pa je naponsko pojačanje:

$$a_v = \frac{v_i}{v_{ud}} = g_m \frac{r_o}{2} = \frac{V_A}{V_{GS} - V_t} \quad (10.32)$$

Sa savremenim MOS tranzistorima se može postići naponsko pojačanje od 20 do 100. Još veće pojačanje se može dobiti ako se umesto prostog strujnog izvora za dinamičko (aktivno) opterećenje upotrebe složeniji strujni izvori koji imaju veću dinamičku otpornost. Očigledno je da je ulazna otpornost MOS diferencijalnog pojačavača beskonačna, ali i da je izlazna vrlo velika pa kad se diferencijalni pojačavač koristi kao naponski pojačavač, potrebno je baferisanje njegovog naponskog izlaza drugim pojačavačem sa beskonačnom ulaznom otpornošću.

10.4 Strujni izvori i aktivna opterećenja u bipolarnoj tehnologiji

Strujno ogledalo sa bipolarnim tranzistorima se realizuje na isti način kao sa MOS tranzistorima. Na slici 10.6 prikazano je prosto struno ogledalo sa NPN tranzistorima.



Slika 10.6: Prosto struno ogledalo sa NPN tranzistorima

Tranzistor Q_1 radi u aktivnom režimu jer je $V_{CE} = 0.7 \text{ V} > V_{CES}$. Referentna struja se lako dobija:

:

$$i_R = (V_{CC} - V_{BE}) / R \quad (10.33)$$

Ako su tranzistori identičnih karakteristika što je moguće kad su u integrisanom kolu, jednakost napona na baza-emitor spoju značiće i jednakost kolektorskih struja:

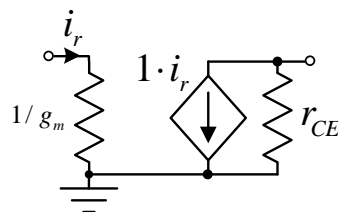
$$v_{BE1} = v_{BE2} \Rightarrow i_{C1} = i_{C2} = i_C \quad (10.34)$$

Referentna struja koja obezbeđuje kolektorsku struju za Q_1 , dodatno je opterećena i sa dve bazne struje, što je ilustrovano na slici 10.6. Na osnovu I Kirhofovog zakona važiće:

$$i_R = i_C + 2i_B = i_C(1 + 2/\beta) \quad (10.35)$$

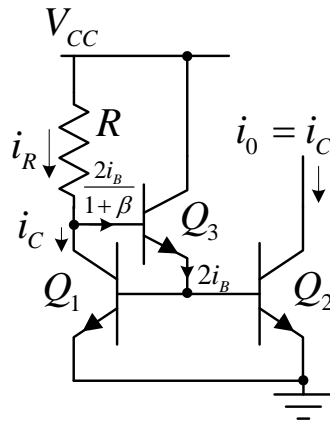
$$i_0 = i_C = \frac{i_R}{1 + 2/\beta} \approx i_R(1 - 2/\beta) \approx i_R$$

Za $\beta = 100$ odstupanje izlazne struje od referentne je oko 2%. I u ovom slučaju strujno ogledalo je strujno kontrolisani strujni izvor sve dok tranzistor Q_2 radi u aktivnom režimu, odnosno sve dok je njegov napon $V_{CE} > V_{CES}$. Izlazna otpornost za mali signal strujnog izvora je r_{ce} , koja je, zbog većeg Erlijeveg napona, za red veličine veća nego što je r_{ds} kod MOS tranzistora slične geometrije. Model strujnog ogledala za mali signal je prikazan na slici 10.7.



Slika 10.7: Model strujnog ogledala sa bipolarnim tranzistorima za mali signal

Ukoliko odstupanje od 2% između referentne struje i zadate struje nije prihvatljivo, dodavanjem još jednog tranzistora u kolo odstupanje može da se smanji dodatnih β puta, što je prikazano na slici 10.8.



Slika 10.8: Strujno ogledalo sa poboljšanim preslikavanjem referentne struje

U ovom slučaju tranzistor Q_3 direktno iz napajanja obezbeđuje dve bazne struje za tranzistore Q_1 i Q_2 , dok je referentna struja dodatno opterećena samo sa baznom strujom tranzistora Q_3 :

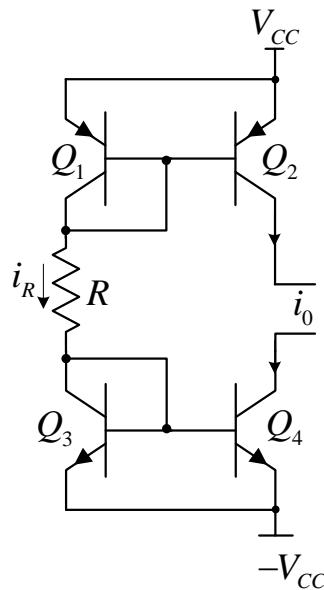
$$i_R = i_C + \frac{2i_B}{1+\beta} \approx i_C(1 + 2/\beta^2) \quad (10.36)$$

Na osnovu toga je izlazna struja jednaka

$$i_C = \frac{i_R}{1 + 2/\beta^2} \approx i_R \quad (10.37)$$

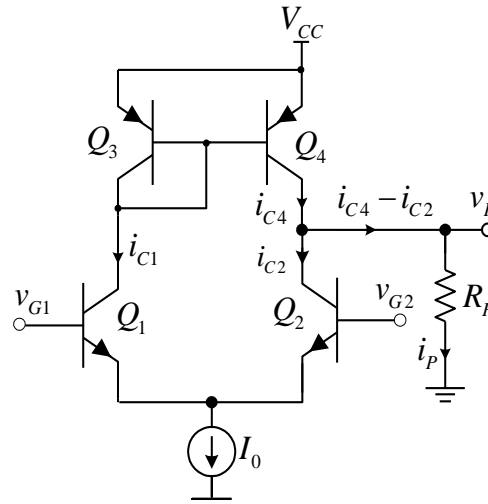
Vidi se da je u ovom slučaju, za $\beta = 100$, odstupanje izlazne struje od referentne oko 0.02%,

Kao i u slučaju MOS strujnih ogledala, ogledalo sa suprotnim smerom struje u odnosu na ogledalo sa slike 10.6 realizuje se sa PNP tranzistorima. Ukoliko je potreban sklop koji istovremeno generiše struju u oba smera, a da je pri tom referentna struja zajednička, moguće je iskoristiti kolo sa slike 10.9.



Slika 10.9: Dvostruko strujno ogledalo

I u bipolarnoj tehnologiji se strujna ogleda mogu koristiti kao dinamičko (aktivno) opterećenje, ali i za konverziju diferencijalnog izlaznog signala u jednostruki. Na slici 10.10 je prikazan diferencijalni pojačavač sa aktivnim opterećenjem u bipolarnoj tehnologiji.



Slika 10.10: Diferencijalni pojačavač sa aktivnim opterećenjem

Pošto strujno ogledalo preslikava kolektorsku struju tranzistora Q_1 u kolektorsku struju tranzistora Q_4 kroz granu prema potrošaču teći će razlika $\approx i_{c1} - i_{c2}$. Primetimo da se radi o ukupnom signalu i da bi u slučaju MOS tehnologije bio znak jednakosti.

Ako se posmatra jednosmerna komponenta napona na potrošaču, ona će biti posledica nesimetrije strujnog ogledala. Za slučaj da je $\beta = 100$, struje I_{CQ2} i I_{CQ1} su jednake $I_0/2$ dok će struja I_{CQ4} preslikati struju I_{CQ1} sa greškom od 2%:

$$I_p = I_{CQ4} - I_{CQ2} = 0.98I_{CQ1} - I_{CQ2} = -0.02I_0 / 2 = -I_0 / 100 \quad (10.38)$$

Sleduje da je izlazni napon u MRT jednak

$$V_{IQ} = -R_p \cdot I_0 / 100, \quad (10.39)$$

a njegova vrednost mora biti takva da su tranzistori Q_2 i Q_4 u aktivnom režimimu. Što se tiče malog signala pobudni generatori su u protivfazi pa će doći do sabiranja signala struje tranzistora Q_1 i Q_2 tako da je neidealnost strujnog ogledala zanemariva. Važi da je

$$i_p = i_{c1} - i_{c2} = g_m v_{be1} - g_m v_{be2} = g_m (v_{be1} - v_{be2}) = g_m (v_{g1} - v_{g2}) = g_m v_d \quad (10.40)$$

Vidi se da je diferencijalni pojačavač sa aktivnim opterećenjem, pod uslovom da je Erljev efekat zanemariv, naponski kontrolisani strujni izvor za mali signal, sa diferencijalnim ulazom i jednostrukim izlazom sa pojačanjem g_m .

Napon na potrošaču zavisi od vrednosti potrošača:

$$v_p = i_p R_p = g_m R_p v_d \quad (10.41)$$

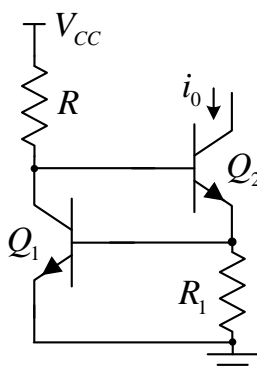
pa je naponsko pojačanje zavisno od potrošača i jednako je

$$a_v = g_m R_p \quad (10.42)$$

Ukoliko $R_p \rightarrow \infty$ Erlijev efekat mora da se uzme u obzir. Identično kao u slučaju pojačavača sa MOS tranzistorima, tada je pojačanje $a_v = g_m r_{ce} / 2$, pod uslovom da svi tranzistori imaju isti Erlijev napon.

Opisana strujna ogledala, kada se koriste kao strujni izvori, mogu pod određenim uslovima da pokažu niz nedostataka. Možda i najbitniji nedostatak opisanih strujnih ogledala, naročito u MOS tehnologiji, može u pojedinim situacijama biti mala izlazna otpornost. U integrisanoj tehnologiji taj nedostatak se otklanja složenijim konstrukcijama od kojih su najpoznatije Kaskodno, Vidlarovo i Vilsonovo strujno ogledalo. Analiza izlazne otpornosti takvih konstrukcija je relativno jednostavna ali prevazilazi okvire kurseva kojima je ova knjiga namenjena i lako se može naći u dostupnoj udžbeničkoj i tehničkoj literaturi. Bitno je napomenuti da strujna ogledala, isto kao i diferencijalni pojačavači, imaju smisla u integrisanoj tehnologiji gde je obezbeđena uparenost, i samo u izuzetnim slučajevima diskretna realizacija može biti od koristi.

Drugi očigledan nedostatak se više može pripisati kolima za generisanje referentne struje, nego samim strujnim ogledalima. Kao što je pokazano, referentna struja direktno zavisi od napona napajanja, što onemogućava efektivnu upotrebljivost ovako realizovanih strujnih izvora u savremenim pojačavačkim kolima čije se dozvoljeno napajanje specificira u granicama koje mogu da variraju i preko $\pm 50\%$. Na primer, ako je promena napona napajanja 50% , u slučaju bipolarnog strujnog ogledala promena referentne struje će biti 50% .



Slika 10.11. Jednostavan samoreferencirajući strujni izvor

Na slici 10.11. prikazan je jednostavan samoreferišući strujni izvor čija izlazna struja zavisi od napona v_{BE1} . Iako je za preciznu analizu potrebno rešavanje sistema nelinearnih jednačina, princip rada kola može da se ilustruje i bez njihovog rešavanja. Ako se zanemare bazne struje, izlazna struja je jednaka

$$i_0 = i_{C2} = \frac{v_{BE1}}{R_1} \quad (10.43)$$

Sa druge strane napon v_{BE1} logaritamski zavisi od struje kroz Q_1 , pri čemu struja tranzistora Q_1 iznosi

$$i_{C1} = \frac{V_{CC} - v_{BE1} - v_{BE2}}{R} \quad (10.44)$$

Logaritamska zavisnost napona v_{BE1} od struje kroz Q_1 može se prikazati u formi

$$v_{BE1} = V_T \ln \frac{i_{C1}}{I_S} = V_T \ln \frac{V_{CC} - v_{BE1} - v_{BE2}}{R I_S} \quad (10.45)$$

Logaritamska zavisnost znači da se svaka promena napona V_{CC} logaritmuje da bi se dobio napon v_{BE1} od koga zavisi izlazna struja po formuli 10.43, sto je daleko manja osetljivost nego u slučaju prostog strujnog ogledala. Interesantno je da se u prethodnoj formuli mogu usvojiti i približne vrednosti napona v_{BE1} i v_{BE2} i da se pri tome neće napraviti velika greška upravo zbog logaritmovanja!

Što se tiče preciznog rešenja za struje i napone u kolu, u prethodne dve jednačine 10.43 i 10.44 postoje 4 nepoznate veličine, dve struje kolektora i dva napona v_{BE} . Preostale dve jednačine su u formi 10.45 i one daju vezu između struje kolektora i napona v_{BE} . Nelinearni sistem jednačina je moguće veoma jednostavno numerički rešiti, jer rešenje brzo konvergira, što ćemo da ilustrujemo na sledećem primeru:

Neka su poznati parametri kola, $I_S = 10^{-16}$ A i $\beta = 100$, $V_T = 26$ mg, $V_{CC} = 12$ V, $R = 10$ k Ω , i $R_1 = 350$ Ω . Pretpostavimo potpuno nerealno da je pad napona v_{BE1} i v_{BE2} jednak 0.5 V. Ako se iskoriste jednačine 10.43 i 10.44 dobijaju se struje $i_{C1} \approx 1.1$ mA i $i_{C2} \approx 1.43$ mA. Ako se upotrebi logaritamska formula i njom se odrede naponi v_{BE1} i v_{BE2} dobija se

$$v_{BE1} = V_T \ln \frac{i_{C1}}{I_S} = V_T \ln(1.1 \cdot 10^{13}) = \underbrace{V_T \ln(1.1)}_{\text{varijabilni deo}} + 13V_T \ln(10) \approx 13V_T \ln(10) = 0.78 \text{ V} \quad (10.46)$$

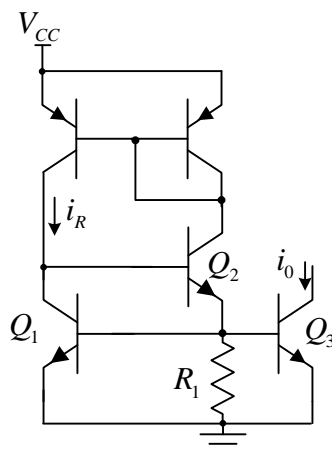
Sada možemo da odredimo preciznije $i_{E2} = 2.23$ mA. Na osnovu toga je $i_{C2} = 2.2$ mA. Tačno rešenje na 3 decimale je 2.202 mA. Dakle sasvim je dovoljna jedna iteracija!

Približnim računanjem struje i_{C1} i na osnovu prethodne analize, vrlo lako možemo da vidimo i kolika je promena struje ako se napon napajanja menja od 6 V do 18 V, jer na to utiče samo varijabilni deo u jednačini 10.46:

$$\begin{aligned} \text{za } 6 \text{ V: } \Delta i_{E2} &= \frac{V_T \ln(0.5)}{350 \Omega} = -0.05 \text{ mA} \\ \text{za } 18 \text{ V: } \Delta i_{E2} &= \frac{V_T \ln(1.7)}{350 \Omega} = +0.04 \text{ mA} \end{aligned} \quad (10.47)$$

što predstavlja devijaciju od oko $\pm 2\%$ za promenu napona napajanja od $\pm 50\%$.

Ukoliko bi se otpornik R zamenio strujnim izvorom referisanim prikazanim kolom, a struja tranzistora Q_1 preslikala običnim strujnim ogledalom, dobilo bi se komplikovanije rešenje ali potpuno nezavisno od promene napona napajanja, slika 10.12.



Slika 10.12: Samoreferencirajuće strujno ogledalo nezavisno od napona napajanja

10.5 Višestepeni pojačavači

Višestepeni pojačavači se sastoje od kaskadne veze više pojačavačkih ćelija. Glavne svrhe kaskadnog povezivanja su postizanje većeg pojačanja nego što je moguće jednim stepenom i optimizacija ulazne i izlazne otpornosti radi maksimizacije efikasnosti (pobuda i potrošač mogu da budu i visoko otporni i niskootporni). Pri tome treba da se povede računa o različitim aspektima dizajna višestepenog pojačavača, od kojih su najbitniji izbor pojačavačkih ćelija, redosled njihovog povezivanja, izbor tehnologije (BJT, MOS, dimenzije...), i polarizacija.

Postoje 3 mogućnosti međusobnog povezivanja ćelija, kapacitivna sprega, direktna sprega i induktivna sprega.

Induktivna sprega je atraktivna na visokim učestanostima i kod nje se primenjuju tehnike polarizacije koje nisu obuhvaćene ovom knjigom. Iz tog razloga pažnju ćemo posvetiti preostalim mogućnostima

Kapacitivna sprega pojedinačnih pojačavačkih ćelija ima sledeće pozitivne karakteristike:

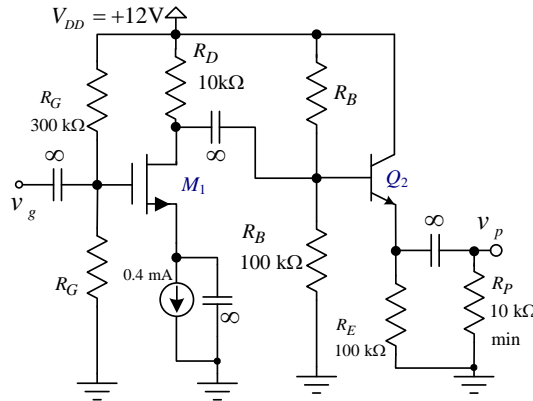
- za svaki stepen nezavisno može da se podesi MRT za optimalno funkcionisanje celog sistema po proizvoljnom kriterijumu
- MRT može da se podesi da bude na sredini jednosmerne prenosne karakteristike i tako obezbedi maksimalnu moguću amplitudu signala bez odsecanja
- sve može da se realizuje sa NPN i NMOS tranzistorima koji su generalno boljih karakteristika nego PNP i PMOS tranzistori.

Sa druge strane, već je rečeno da kondenzatori, koji treba da predstavljaju kratku vezu za AC signal, treba da su velikih dimenzija sto je izuzetno nepovoljno u integrisanoj tehnologiji i može da anulira sve prednosti.

Pošto projektovanje pojačavača prevazilazi okvire ove knjige, zadržaćemo se na analizi. Prilikom analize kapacitivno spregnutih pojačavača, nezavisno za svaku ćeliju određuje se MRT. Ukoliko se zanemari Erlijev efekat svi osnovni pojačavački stepeni, uključujući i diferencijalni pojačavač u svim varijantama, mogu da se zamene njihovim ekvivalentom za mali signal u formi neidelnog NKNI. Osim ZC pojačavača sve ostale konfiguracije mogu da se zamene direktno na osnovu parametara dobijenih iz individualne analize za MRT, dok se kod ZC pojačavača mora uzeti u obzir i opterećenje njegovog izlaza jer ono utiče na naponsko pojačanje. Alternativa je da se koristi kompletna šema za mali signal. Ilustrovaćemo analizu jednog ovakvog pojačavača sledećim primerom.

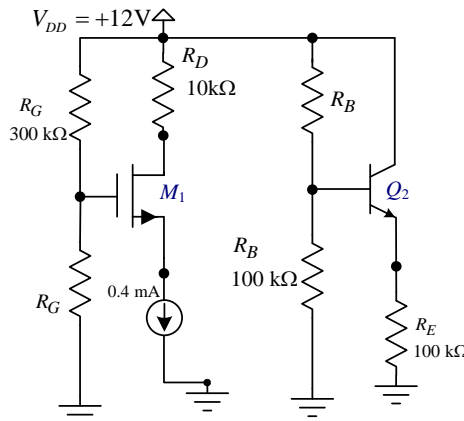
Primer: 10.1

Na slici 10.13 je dat dvostepeni kapacitivno spregnuti pojačavač. Za tranzistore je poznato: NMOS $V_t = 1 \text{ V}$, $B = 1 \text{ mA/V}^2$, NPN $I_S = 10^{-16} \text{ A}$ i $\beta = 100$, $V_T = 26 \text{ mV}$, $V_{BE} = 0.7 \text{ V}$. Odrediti naponsko pojačanje malog signala v_g .



Slika 10.13: Dvostepeni kapacitivno spregnuti pojačavač

Prvi deo analize je određivanje MRT za oba pojačavačka stepena nezavisno. U tu svrhu koristi se šema pojačavača za veliki signal, slika 10.14.



Slika 10.14. Šema za veliki signal pojačavača sa slike 10.13.

Pošto su razdvojeni, pojedinačni pojačavački stepeni se analiziraju metodama koje su već razrađene. Za ulazni stepen važi:

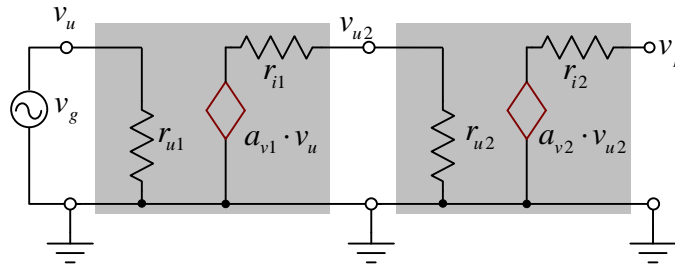
$$V_{GQ} = 6 \text{ V}, V_{DQ} = 12 \text{ V} - 10 \text{ k}\Omega \cdot 0.4 \text{ mA} = 8 \text{ V} \quad (10.48)$$

$$g_{m1} = \sqrt{2BI_{DQ}} = 0.89 \text{ mS}$$

Za drugi pojačavački stepen važi da je otpornost koja se vidi iz baze $\approx \beta \cdot R_E$ što je mnogo veće od otpornosti razdelnika koji se nalazi u bazi. Stoga se bazna struja može zanemariti, pa je DC napon na bazi 6 V. Iz toga proizilazi:

$$\begin{aligned}
V_{EQ} &= 6 \text{ V} - 0.7 \text{ V} = 5.3 \text{ V} \\
I_{CQ} &= 5.3 \text{ V} / 100 \text{ k}\Omega = 0.053 \text{ mA} \\
g_{m2} &= I_{CQ} / V_T = 0.053 \text{ mA} / 26 \text{ mV} = 2 \text{ mS}
\end{aligned}
\tag{10.49}$$

Drugi deo postupka je analiza za mali signal i računanje tražene električne veličine. Kako su pojačavačke ćelije standardne, obe se mogu zameniti njihovim neidealnim NKNI ekvivalentima, slika 10.15:



Slika 10.15: Ekvivalentna šema za mali signal pojačavača sa slike 10.13.

Prvi stepen je ZS pojačavač i njegovi parametri u ekvivalentnom modelu za mali signal se dobijaju na osnovu parametara mirne radne tačke:

$$\begin{aligned}
r_{u1} &= R_G \parallel R_G = R_G / 2 = 150 \text{ k}\Omega, \\
a_{v1} &= -g_{m1} R_D = -8.9, \\
r_{i1} &= R_D = 10 \text{ k}\Omega.
\end{aligned}
\tag{10.50}$$

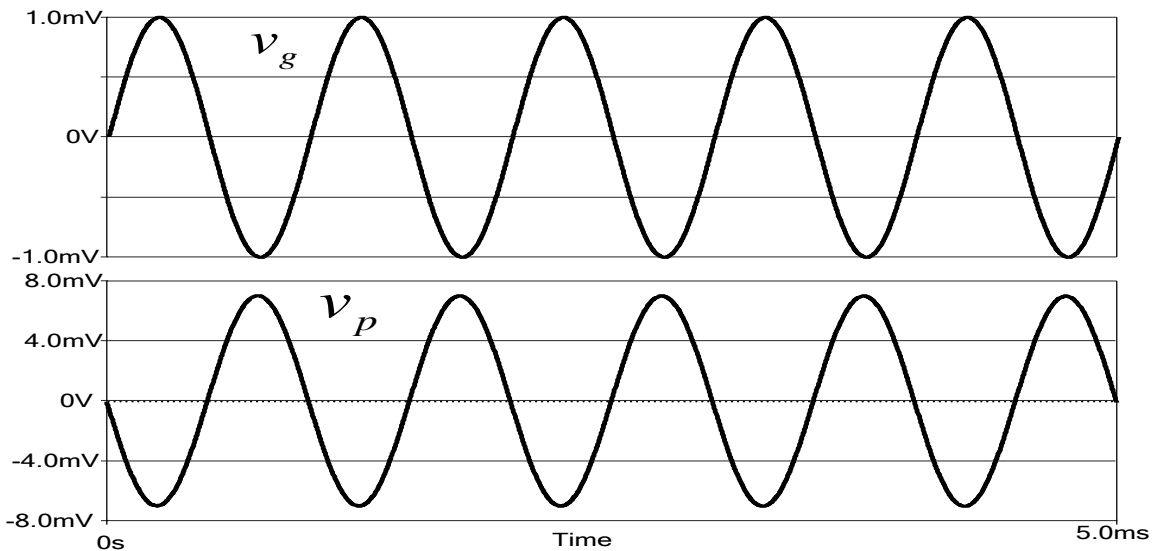
Drugi stepen je ZC pojačavač, što znači da treba uzeti u obzir uticaj potrošača na pojačanje. Kada se to uradi, zaključuje se da izlazna otpornost više nije bitna jer nema dodatnog potrošača koji bi pravio pad napona na izlaznoj otpornosti. Parametri ekvivalentnog NKNI su sledeći:

$$\begin{aligned}
r_{u2} &= R_B \parallel R_B \parallel (r_{\pi 2} + (1 + \beta)(R_E \parallel R_P)) \approx R_B / 2 = 50 \text{ k}\Omega, \\
a_{v2} &= \frac{g_{m2}(R_E \parallel R_P)}{1 + g_{m2}(R_E \parallel R_P)} = 0.95 \approx 1.
\end{aligned}
\tag{10.51}$$

Kada su poznati parametri oba NKNI, a na osnovu šeme sa slike 10.15, sukcesivno se određuje konačna vrednost napona na potrošaču::

$$\begin{aligned}
v_{u2} &= a_{v1} v_g \frac{r_{u2}}{r_{i1} + r_{u2}} = -7.4 v_g, \\
v_p &= a_{v2} v_{u2} = -7.4 \cdot 0.95 \cdot v_g = 7 v_g.
\end{aligned}
\tag{10.52}$$

Dakle, dobijeno naponsko pojačanje je 7. Na slici 10.16 dati su vremenski dijagrami pobudnog napona i napona na potrošaču dobijeni PSpice simulacijom.



Slika 10.16: Vremenski dijagrami pobude i odziva kola sa slike 10.13

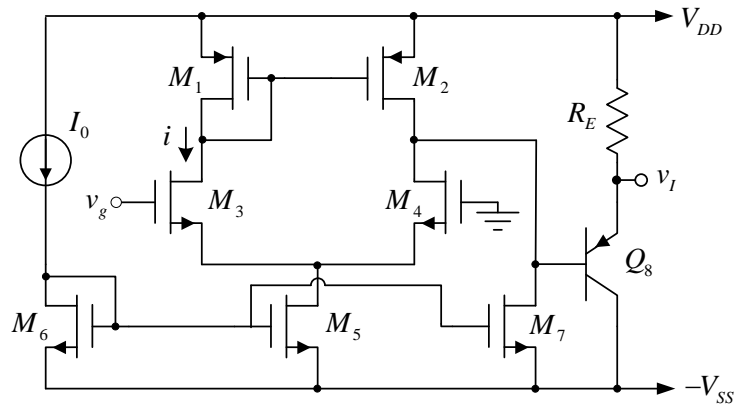
Kada su u pitanju direktno spregnuti pojačavači, ceo sistem je za veliki signal jedno složeno jednosmerno kolo, tako da se može govoriti o jedinstvenoj radnoj tački za celo kolo kod koje su sve koordinate međusobno zavisne. Jedinstvena MRT ograničava fleksibilnost podešavanja parametara za svaku pojedinačnu ćeliju, i pri tome je teško podesiti da pojedinačne radne tačke budu na sredini odgovarajuće jednosmerne prenosne karakteristike. Poseban problem predstavlja translacija jednosmernih nivoa između ćelija, što se samo delimično rešava upotrebom komplementarnih tranzistora u susednim stepenima. Prednosti direktnog kaskadiranja su izostanak sprežnih kondenzatora, kao i smanjen broj kondenzatora. Posebna prednost je kompaktna realizacija jer se ista polarizacija može iskoristiti za susedne stepene.

Prilikom analize direktno spregnutih pojačavača, DC analiza je komplikovanija u odnosu na pojačavače sa kapacitivnom spregom - potrebno je analizirati kompletnu šemu. AC analiza je identična kao u slučaju kapacitivne sprege: ako se zanemari Erlijev efekat, svi pojačavački stepeni, osim ZC, direktno se menjaju njihovim NKNI ekvivalentom, dok se za ZC mora voditi računa o njegovom potrošaču.

Analizu ovakvog pojačavača ilustrovaćemo sledećim primerom.

Primer: 10.2

Na slici 10.17 je prikazan dvostepeni pojačavač poznatih parametara: $\beta = 100$, $V_t = 1\text{V}$, $k_p = 0.5\text{ mA/V}^2$, $V_{DD} = V_{SS} = 12\text{ V}$, $I_0 = 800\text{ }\mu\text{A}$, $R_E = 350\text{ }\Omega$ $W/L=2/1$ za sve MOS tranzistore osim za M_7 za koji je $W/L=2/5$. Odrediti naponsko pojačanje za mali signal.



Slika 10.17: Direktno spregnuti dvostepeni pojačavač

Rešenje:

U MRT struja I_0 se deli na dva jednaka dela i čini da su DC struje M_3 i M_4 od po 400 μA . Transkonduktansa $g_{m3,4}$ iznosi:

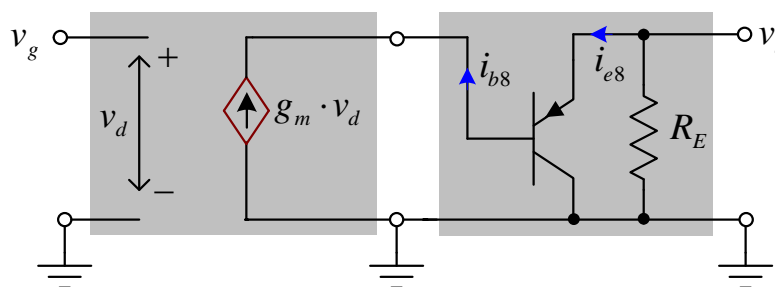
$$g_{m3,4} = g_m = \sqrt{2BI_{DQ3,4}} = \sqrt{2I_{DQ} \cdot k_p \cdot W / L} = \sqrt{2 \cdot 0.4\text{mA} \cdot 0.5 \frac{\text{mA}}{\text{V}^2} \cdot 2} = 0.9 \text{ mS}. \quad (10.53)$$

U MRT struja $I_{DQ7} = I_0/5 = 800/5 = 160 \mu\text{A}$ i ona kompletno predstavlja I_{BQ8} , tako da je

$$V_{IQ} = V_{CC} - R_E \cdot \beta \cdot I_{BQ8} \approx 6.4 \text{ V} \quad (10.54)$$

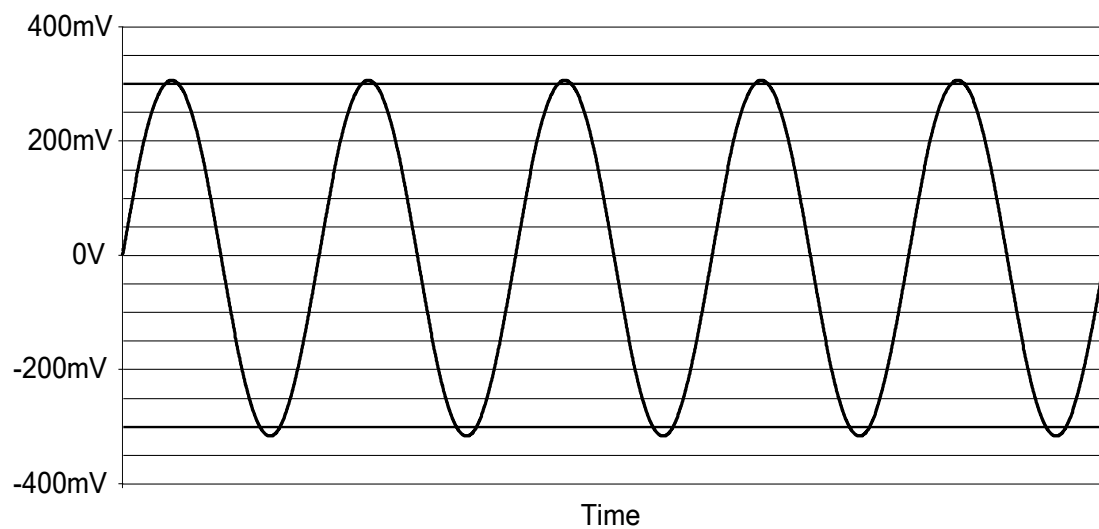
Kako je za mali signal M_7 isključen, jer je on DC strujni izvor, a diferencijalni pojačavač sa strujnim ogledalom je kontrolisani strujni izvor, tranzistor Q_8 se pobuđuje samo tom strujom i pojačava je β puta, tako da za njega nije potrebno odrediti parametre za mali signal (β je dovoljno).

Šema za mali signal pojačavača sa slike 10.17 data je na slici 10.18. Kako je bazna struja Q_8 jednaka $i_{b8} = -g_m v_d$, a napon na izlazu jednak $v_i = -R_E i_{e8}$, dobija se da je $v_i = (1 + \beta) g_m R_E v_d = 31.5 \cdot v_d$



Slika 10.18: Šema za mali signal pojačavača sa slike 10.17

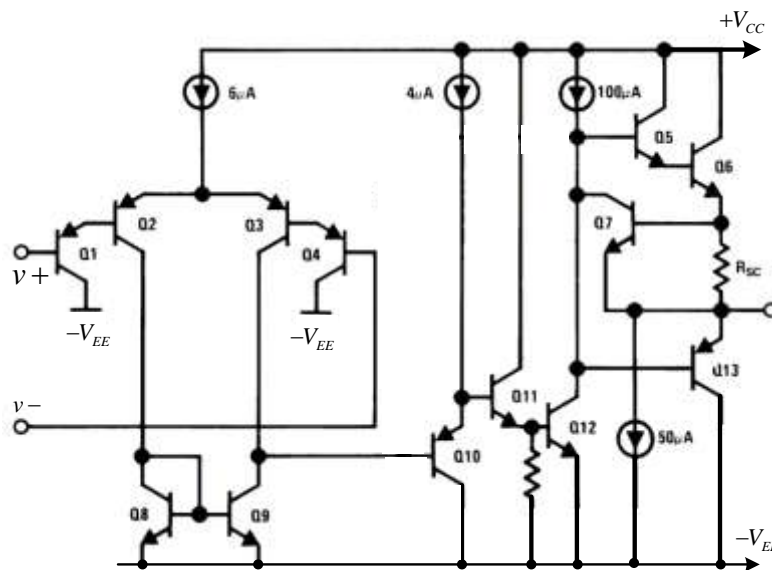
Na slici 10.19 prikazan je vremenski dijagram izlaznog napona pojačavača sa slike 10.17 dobijen PSpice simulacijom. Amplituda pobudnog generatora je 10 mV.



Slika 10.19: Vremenski dijagram izlaznog napona pojačavača sa slike 10.17

11. Operacioni pojačavač i primene

Kao što smo rekli u prethodnom poglavlju, radi ostvarivanja performansi po nekoliko kriterijuma, individualni pojačavački stepeni se povezuju u kaskadu da bi zajedno sa drugim pomoćnim blokovima činili jedan složeni pojačavač. Sa druge strane, ukoliko bi postojali idealni kontrolisani generatori kao realne komponente, oni bi univerzalno mogli da se primene u svim prilikama. Kako idealni kontrolisani generatori ne postoje, konstruisana je komponenta čijom upotrebom mogu da se sintetizuju kola koja u većini praktičnih aplikacija vrlo uspešno simuliraju kontrolisane generatore. Ta komponenta se zove *operacioni pojačavač* i u suštini je višestepeni pojačavač sa diferencijalnim ulazom i jednostrukim izlazom. Na slici 11.1 prikazana je pojednostavljena šema jednog komercijalnog operacionog pojačavača.

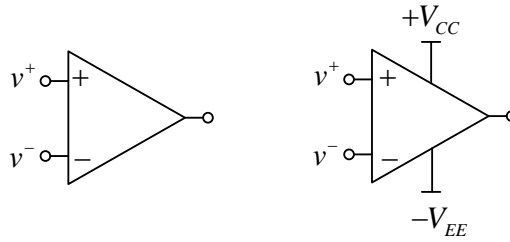


Slika 11.1: Pojednostavljena šema jednog komercijalnog pojačavača LM324

Ako se analizira struktura pojačavača sa slike 11.1, može se uočiti da su ulazi diferencijalnog pojačavača baferisani pojačavačima sa zajedničkim kolektorom (par Q1 i Q4) što uz malu struju polarizacije tranzistora diferencijalnog pojačavača daje ulaznu otpornost reda 100 M Ω . Izlaz diferencijalnog pojačavača se pojačava ZC pojačavačem sa aktivnim opterećenjem (Q10), iza koga ide ZC pojačavač (Q11). Iza ZC pojačavača postavljen je još jedan ZE pojačavač (Q12), a iza njega izlazni stepen sa komplementarnim pojačavačima sa zajedničkim kolektorom. Iz datog se može zaključiti da se radi o šestostepenom pojačavaču. Ukupno pojačanje je reda 10^5 .

Po svojoj strukturi operacioni pojačavač je naponski pojačavač opisan u trećem poglavlju sa skoro beskonačnom ulaznom otpornošću, malom ali konačnom izlaznom otpornošću i velikim naponskim pojačanjem. U teorijskim razmatranjima se često, zbog jednostavnijeg računa, koristi pojam *idealnog operacionog pojačavača*. Takav pojačavač je u stvari idealni naponski pojačavač sa beskonačno velikim pojačanjem $a \rightarrow \infty$. U suštini, svaki komercijalni operacioni pojačavač ispravno upotrebljen, ponaša se kao idealni operacioni pojačavač.

Električni simboli kojima se u električnim šemama predstavlja operacioni pojačavač su simboli naponskog pojačavača uz eventualno dodate priključke za napajanje i prikazani su na slici 11.2. Napajanje se obično podrazumeva i ne crta jer u standardnim aplikacijama ne utiče na logiku rada kola. Postoje i retke aplikacije u kojima je napajanje promenljivo, ili utiče na logiku rada kola, pa se u električnim šemama takvih aplikacija crta.



Slika 11.2: Simboli operacionog pojačavača, sa i bez napajanja

11.1 Prenosna karakteristika operacionog pojačavača

Osnovna funkcija operacionog pojačavača je da realizuje funkciju idealnog naponskog pojačavača, ali samo u granicama napajanja:

$$v_I = \begin{cases} +V_{CC}, & a \cdot v_U \geq +V_{CC} \\ a \cdot v_U, & -V_{EE} < a \cdot v_U < +V_{CC} \\ -V_{EE}, & a \cdot v_U \leq -V_{EE} \end{cases} \quad (11.1)$$

pri tome je $v_U = v^+ - v^-$, a je pojačanje koje jeste veliko ali neprecizno, a svi priključci treba da budu u granicama napajanja:

$$-V_{EE} < v^+, v^-, v_I < +V_{CC} \quad (11.2)$$

Za potencijale napajanja mora da bude ispunjen uslov propisan od proizvođača, na primer

$$V_{\min} < (+V_{CC} - (-V_{EE})) < V_{\max}, \quad (11.3)$$

gde je V_{\min} minimalna potencijalna razlika izmedju pozitivnog i negativnog napona napajanja da bi pojačavač mogao da funkcioniše, a V_{\max} maksimalna potencijalna razlika izmedju pozitivnog i negativnog napona napajanja da bi pojačavač radio bez opasnosti da dođe do prenaponskog proboja internih tranzistora. Pri tome vrednosti potencijala napjanja (napona napajanja) nisu striktno, na primer, ako je $V_{\min} = 10 \text{ V}$, bitno je da minimalna vrednost pozitivnog napajanja $+V_{CC}$ bude $-V_{EE} + 10 \text{ V}$ bez obzira da li negativno napajanje ima vrednost -15 V ili $+5 \text{ V}$.

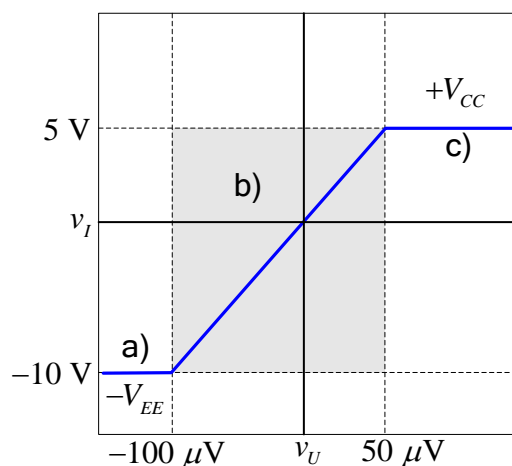
Principijelna jednosmerna prenosna karakteristika operacionog pojačavača kome nisu simetrična napajanja, odnosno $|+V_{CC}| \neq |-V_{EE}|$, prikazana je na slici 11.3 Karakteristika prolazi kroz koordinatni početak i na njoj mogu da se uoče 3 segmenta, slika 11.3:

a) kada je napon na izlazu pojačavača konstantan i iznosi $-V_{EE}$. Taj segment se naziva negativno zasićenje.

b) kada je napon na izlazu jednak $a \cdot v_U$, i taj segment se naziva linearna oblast. Da bi operacioni pojačavač radio kao pojačavač potrebno ga je držati u toj oblasti.

c) kada je napon na izlazu jednak $+V_{CC}$. Taj segment se naziva pozitivno zasićenje.

Direktna primena operacionog pojačavača na način da se koristan signal dovede na ulazne priključke nije korisna jer je pojačanje preveliko, i nije precizno. Osnovna namena operacionog pojačavača je da se pomoću njega i dodatnih komponenti realizuju složenija kola koja između mnogih ostalih mogu da oponašaju funkcije idealnog naponskog pojačavača, idealnog ili neidealnog naponskog bafera. Da bi se te funkcije ostvarile, potrebno je primeniti negativnu povratnu spregu.

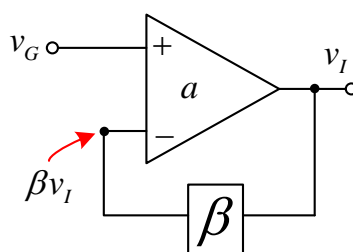


Slika 11.3. Principijelna jednosmerna prenosna karakteristika operacionog pojačavača

11.2 Negativna povratna sprega

Posmatrajmo šemu na slici 11.4 gde je upotrebljen idealni naponski pojačavač pojačanja $a > 1$ i kod koga je signal sa izlaza putem linearne β mreže vraćen na minus priključak pojačavača. Topološki posmatrano, ako je $\beta > 0$ takva sprega se naziva *negativna povratna sprega* ili *negativna reakcija*. Alternativno, ukoliko bi važiolo da je $\beta < 0$ povratna sprega bi trebala da se vrati na plus priključak i tada bi se ponovo radilo o negativnoj povratnoj sprezi.

Naravno, struktura operacionog pojačavača omogućuje i povezivanje sa suprotnom logikom: za $\beta > 0$ povezivanje izlaza na ulazni + priključak, kao i povezivanje izlaza na ulazni – priključak za $\beta < 0$. Takva povratna sprega se zove *pozitivna povratna sprega*, i postoje aplikacije u kojima je korisna, ali ta tematika nije predmet ovog udžbenika.



Slika 11.4: Ilustracija negativne povratne sprege za $\beta > 0$

Razmotrićemo situaciju kada je $\beta > 0$. Pošto je β mreža linearna ona će da skalira izlazni napon β puta i na minus priključku pojačavača biće napon βv_I . Sada može da se postavi jednačina za izlazni napon:

$$v_I = a(v^+ - v^-) = av_G - a\beta v_I \quad (11.4)$$

Sređivanjem prethodne formule dobija se

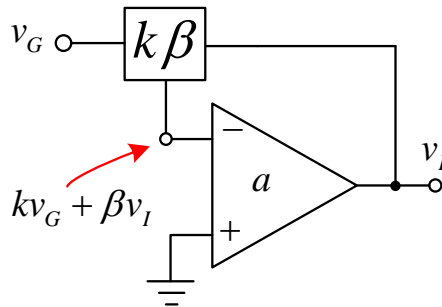
$$v_I = \frac{a}{1 + \beta a} v_G \quad (11.5)$$

Izraz

$$a_r = \frac{a}{1 + \beta a} \quad (11.6)$$

naziva se pojačanje sa reakcijom dok se proizvod βa naziva kružno pojačanje. Ovakva konfiguracija naziva se *neinvertujuća konfiguracija*, a pojačavač sa reakcijom se naziva neinvertujući pojačavač pojačanja a_r .

Postoji i druga mogućnost koja je prikazana na slici 11.5. U tom slučaju se signal sa izlaza zajedno sa ulaznim signalom preko $k\beta$ mreže, $\beta > 0$, dovodi na ulazni priključak:



slika 11.5: Negativna povratna sprega u invertujućoj konfiguraciji

Sada može da se postavi jednačina za napon na izlazu:

$$v_I = a(v^+ - v^-) = 0 - a(\beta v_I + kv_G), \quad (11.7)$$

iz koje proizilazi

$$v_I = -k \frac{a}{1 + \beta a} v_G \quad (11.8)$$

Ovakav pojačavač se naziva invertujući a njegovo pojačanje sa reakcijom iznosi

$$a_r = -k \frac{a}{1 + \beta a} \quad (11.9)$$

Ukoliko je pojačanje idealnog naponskog pojačavača a dovoljno veliko da je $1 \ll \beta a$, tada se jedinice u imeniocima formula 11.6 i 11.9 mogu zanemariti pa se pojačanje sa reakcijom neinvertujućeg pojačavača svodi na $a_r = 1/\beta$, a invertujućeg na $a_r = -k/\beta$.

Prethodni zaključak ima dalekosežne efekte. Ukoliko se umesto idealnog naponskog pojačavača koristi operacioni pojačavač koji ima jako veliko pojačanje (kaže se $a \rightarrow \infty$) koje ne mora da bude ni precizno ni stabilno, ali u svim uslovima zadovoljava nejednakost $1 \ll \beta a$, tada se kolo sa operacionim pojačavačem ponaša kao kolo realizovano sa idealnim naponskim pojačavačem. Dakle, što se tiče primene operacioni pojačavač sa negativnom povratnom spregom (NPS) može se smatrati idealnim naponskim pojačavačem sa $a \rightarrow \infty$.

Kao što je već rečeno, napon na minus priključku neinvertujućeg pojačavača iznosi $v^- = \beta \cdot v_I$, pa ako je $v_I = v_G / \beta$ dobija se da je

$$v^- = \beta(v_G / \beta) = v_G = v^+. \quad (11.10)$$

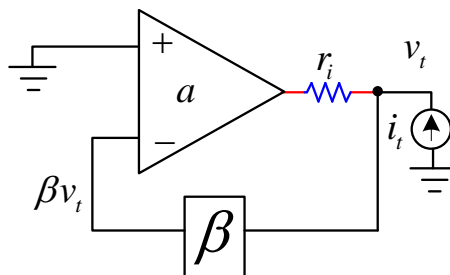
U slučaju invertujućeg pojačavača dobija se identičan rezultat:

$$v^- = \beta \cdot v_i + kv_G = \beta \cdot (-k / \beta v_G) + kv_G = 0 = v^+ \quad (11.11)$$

Na osnovu prethodnog razmatranja može da se izvede sledeći zaključak: *ukoliko postoji NPS i ukoliko $a \rightarrow \infty$, tada je $v^+ = v^-$.*

Ako se potencijali na ulaznim priključcima pojačavača izjednače, vezivanje bilo kakvog otpornika između njih neće proizvesti nikakav efekat jer kroz takav otpornik neće teći struja, što znači da i ako pojačavač ima konačnu ulaznu otpornost, NPS i $a \rightarrow \infty$ učiniće da mu ulazna otpornost (ulazna otpornost sa reakcijom) postane beskonačna.

Posmatrajmo sada šemu sa slike 11.6 i kojoj je upotrebljen neidealni naponski pojačavač pojačanja $a \rightarrow \infty$ i izlaznom otpornošću r_i . Odredimo napon v_t koji je posledica dejstva generatora i_t , čime ćemo odrediti izlaznu otpornost celog kola.



Slika 11.6. NPS primenjena na neidealni naponski pojačavač kod koga je $a \rightarrow \infty$ i čija je izlazna otpornost predstavljena eksterim otpornikom r_i

Pošto se signal sa izlaza vraća na minus priključak pojačavača, povratna sprega je negativna. Kako je ispunjeno da $a \rightarrow \infty$, biće ispunjeno da je $v^+ = 0 = v^-$. Istovremeno $v^- = \beta v_t$, što znači da je $v_t = 0$. Kako strujni test generator proizvodi napon koji je jednak nuli može se zaključiti da je otpornost koju on vidi jednaka nuli. Zaključak: ako postoji NPS i ako $a \rightarrow \infty$, izlazna otpornost kola sa reakcijom je jednaka nuli.

Dakle ulazna i izlazna otpornost operacionog pojačavača koji se koristi kao realna komponenta nisu bitni; dovoljno je da pojačavač ima veliko naponsko pojačanje da postoji NPS i da radi u linearnom režimu, a preciznost pojačanja sa reakcijom zavisice od preciznosti β mreže. Pri tome β mreža može biti i aktivna.

Činjenica da je $v^+ = v^-$, i da nema struje kroz ulazne priključke u mnogim slučajevima znatno olakšava analizu i sintezu kola sa operacionim pojačavačima.

11.3 Primene operacionog pojačavača

Operacioni pojačavač ima brojne primene i predstavlja najčešće korišćeni sklop savremene analogne elektronike. Primenom operacionog pojačavača se mogu realizovati pojačavači precizno određenog pojačanja, kola za realizaciju aritmetičkih operacija, kola za integraljenje i diferenciranje, itd. Najčešće korišćena kola biće prikazana u narednom izlaganju. Podrazumeva se da su napajanja simetrična i dovoljno velika da pojačavači rade u linearnom režimu, a sobzirom da su u pitanju linearna kola podela na veliki i mali signal nije bitna.

11.3.1 Invertujući pojačavač

Posmatrajmo kolo sa slike 11.7. S obzirom da je invertujući priključak na virtuelnoj masi, struja kroz otpornik R_G je:

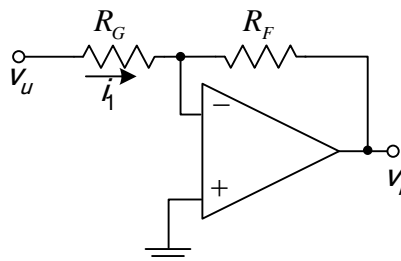
$$i_1 = \frac{v_u}{R_G} \quad (11.12)$$

S obzirom da je ulazna struja pojačavača jednaka nuli, struja i_1 u celini protiče kroz otpornik R_F i daje izlazni napon:

$$v_i = -R_F i_1 = -\frac{R_F}{R_G} v_u \quad (11.13)$$

Naponsko pojačanje je onda:

$$A_v = \frac{v_i}{v_u} = -\frac{R_F}{R_G} \quad (11.14)$$

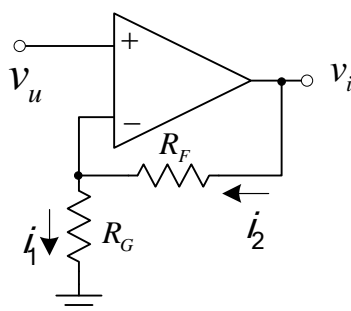


Slika 11.7: Invertujući pojačavač.

Kao što se vidi, naponsko pojačanje je negativno i određeno je odnosom dve otpornosti. Zbog toga se naponsko pojačanje može veoma precizno realizovati jer ne zavisi od karakteristika upotrebljenog pojačavača. Zbog toga što je naponsko pojačanje negativno, izlazni napon će predstavljati pojačanu i invertovanu sliku ulaznog napona, pa se ovo kolo naziva *invertujući pojačavač*. Ako je pobuda sinusoidalna, napon na izlazu biće pojačan sinusoidalni napon koji je fazno pomeren za 180° . Ulazna otpornost ovakvog pojačavača je R_G i on se prilikom analize u svim šemama može zameniti neidealnim naponskim baferom koji ima negativno pojačanje.

11.3.2 Neinvertujući pojačavač

Pojačavač čije je pojačanje pozitivno, ili *neinvertujući pojačavač*, može se realizovati kolom sa slike 11.8.



Slika 11.8: Neinvertujući pojačavač.

S obzirom da je napon između ulaznih priključaka jednak nuli, napon na invertorskom priključku takođe će biti jednak ulaznom naponu, pa je struja kroz otpornik R_G :

$$i_1 = \frac{v_u}{R_G} \quad (11.15)$$

S obzirom da je ulazna struja pojačavača jednaka nuli, struja i_1 u celini protiče kroz otpornik R_F i daje izlazni napon:

$$i_2 = \frac{v_i - v_u}{R_F} = i_1 = \frac{v_u}{R_G} \quad (11.16)$$

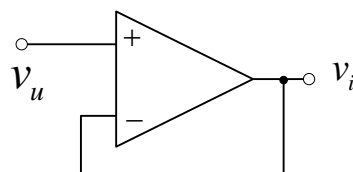
odakle se lako dobija da je naponsko pojačanje jednako:

$$A_v = \frac{v_i}{v_u} = \frac{R_G + R_F}{R_G} = 1 + \frac{R_F}{R_G} \quad (11.17)$$

Dakle, naponsko pojačanje je pozitivno i veće od jedinice. U slučaju sinusoidalne pobude, ovaj pojačavač ne obrće fazu. Njegova ulazna otpornost je beskonačna i može se zameniti idealnim naponskim baferom pojačanja A_v .

11.3.3 Jedinični pojačavač

Jedinični pojačavač je specijalni slučaj neinvertujućeg pojačavača. Ako je $R_F \ll R_G$, onda je naponsko pojačanje blisko jedinici. U graničnom slučaju $R_F \rightarrow 0$ ili $R_G \rightarrow \infty$, pa se dobija kolo prikazano na slici 11.9 čije je naponsko pojačanje tačno jednako jedan. Jedinični pojačavač ima najveću primenu kao razdvojni stepen, koji uz jedinično pojačanje obezbeđuje veliku ulaznu otpornost i malu izlaznu otpornost.

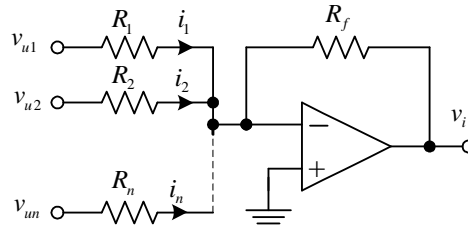


Slika 11.9: Jedinični pojačavač.

11.3.4 Kolo za sabiranje

Kolo za sabiranje je prikazano na slici 11.10. Ono se od invertujućeg pojačavača razlikuje samo po tome što ima više ulaza. Svaka od ulaznih struja data je istom jednačinom kao kod invertujućeg pojačavača. Dakle, pošto je invertujući priključak na virtualnoj masi, imamo:

$$i_k = \frac{v_{uk}}{R_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (11.18)$$



Slika 11.10: Kolo za sabiranje.

S obzirom da je ulazna struja pojačavača jednaka nuli, zbir struja i_k u celini protiče kroz otpornik R_f i daje izlazni napon:

$$v_i = -R_f \sum_{k=1}^n i_k = -R_f \sum_{k=1}^n \frac{v_{uk}}{R_k} \quad (11.19)$$

Ako su svi ulazni otpornici jednaki, $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$, onda se dobija uprošćeni izraz:

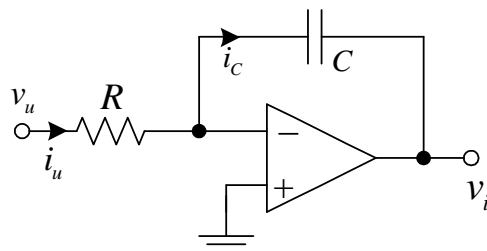
$$v_i = -R_f \sum_{k=1}^n \frac{v_{uk}}{R_k} = -\frac{R_f}{R} \sum_{k=1}^n v_{uk} \quad (11.20)$$

odnosno, izlazni napon je srazmeran zbiru ulaznih napona, po čemu je kolo dobilo ime.

11.3.5 Kolo za integraljenje

Kolo za integraljenje je prikazano na slici 11.11. Kao i kod invertujućeg pojačavača, ulazna struja je data izrazom:

$$i_u(t) = \frac{v_u(t)}{R} \quad (11.21)$$



Slika 11.11: Integrator sa operacionim pojačavačem.

Ista struja protiče kroz kondenzator. S obzirom da su struja kroz kondenzator i napon na kondenzatoru povezani diferencijalnom relacijom:

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} = i_u(t) = \frac{v_u(t)}{R} \quad (11.22)$$

za izlazni napon se dobija:

$$v_i(t) = -v_c(t) = v_i(t_0) - \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t v_u(t) dt \quad (11.23)$$

gde je $v_i(t_0) = -v_c(t_0)$ početni napon na izlazu. S obzirom da je izlazni napon srazmeran integralu ulaznog napona, opisano kolo se naziva kolo za integraljenje, invertujući integrator, ili Milerov integrator.

Interesantno je posmatrati ponašanje invertujućeg integratora u slučaju naizmenične pobude. Tada se može primeniti posmatranje kola u frekvencijskom domenu, odnosno fazorski račun. Fazor ulazne struje dat je izrazom:

$$I_u = \frac{V_u}{R} \quad (11.24)$$

a fazor izlaznog napona:

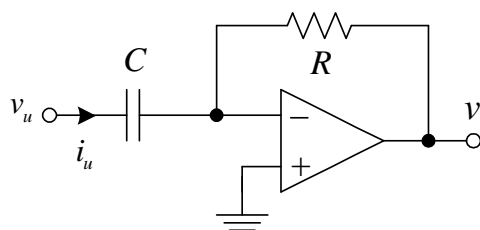
$$V_i = -V_c = -I_u \frac{1}{j\omega C} = -\frac{V_u}{j\omega RC} = j \frac{V_u}{\omega RC} \quad (11.25)$$

odnosno, kolo se ponaša kao idealni integrator i unosi fazni pomeraj od 90° .

11.3.6 Diferencijator

Kolo za diferenciranje je prikazano na slici 11.12. Ulazna struja je data izrazom:

$$i_u(t) = C \frac{dv_u(t)}{dt} \quad (11.26)$$



Slika 11.12: Diferencijator sa operacionim pojačavačem.

Ista struja protiče kroz otpornik R , pa se za izlazni napon dobija:

$$v_i(t) = -Ri_u(t) = -RC \frac{dv_u(t)}{dt} \quad (11.27)$$

Dakle, izlazni napon je srazmeran prvom izvodu ulaznog napona, pa se ovo kolo naziva kolo za diferenciranje ili invertujući diferencijator

Isto kolo može se posmatrati i u frekvencijskom domenu ako je pobuda sinusoidalna. Fazor ulazne struje dat je izrazom:

$$I_u = \frac{V_u}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C V_u \quad (11.28)$$

a fazor izlaznog napona:

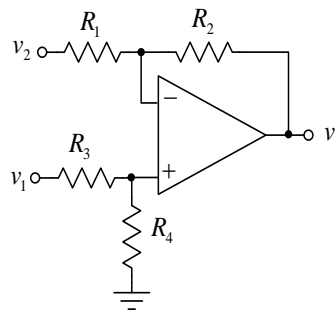
$$V_i = -V_R = -R I_u = -j\omega R C V_u \quad (11.29)$$

odnosno, kolo se ponaša kao idealni diferencijator i unosi fazni pomeraj od -90° .

Kod svih prethodno opisanih kola, minus priključak operacionog pojačavača iskorišćen je za povratnu spregu. Dobijeno pojačavačko kolo je u formi sa jednostrukim ulazom i jednostrukim izlazom. Međutim, postoje brojne aplikacije gde je potreban diferencijalni ulaz, što se realizuje sa sledeća dva kola.

11.3.7 Diferencni pojačavač

Na slici 11.12 prikazan je pojačavač koji ima dva ulaza. Metodom superpozicije može se naći odziv na svaki ulaz pojedinačno, a zatim se sabiranjem odziva dobija konačna vrednost izlaznog napona.



Slika 11.13 Diferencni pojačavač

Neka je $v_1 = 0$. Pošto kroz ulaz operacionog pojačavača ne teče struja, struja neće teći ni kroz R_3 i R_4 otpornike pa se oni mogu zameniti kratkim spojevima. Ostatak kola predstavlja invertujući pojačavač a izlazni napon je jednak

$$v_{i2} = -\frac{R_2}{R_1} v_2 \quad (11.30)$$

Neka je $v_2 = 0$. Sada je u pitanju neinvertujući pojačavač koji pojačava signal sa razdelnika napona R_3 i R_4 , a izlazni napon je jednak

$$v_{i1} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_1 \quad (11.31)$$

Ukupan odziv je sada jednak

$$v_i = v_{i1} + v_{i2} = -\frac{R_2}{R_1} v_2 + \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_1 \quad (11.32)$$

Otpornici u prethodnom izrazu mogu na više način da se podese da važi

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3 + R_3} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (11.33)$$

što je moguće uraditi na više načina, najčešće se podešava uparivanjem otpornika $R_1=R_3$ i $R_2=R_4$. U tom slučaju formula 11.33 glasi

$$v_i = \frac{R_2}{R_1} (v_1 - v_2) = a_d (v_1 - v_2) = a_d \cdot v_d, \quad (11.34)$$

gde je a_d diferencijalno pojačanje a v_d diferencijalni ulazni napon. Kada otpornici ne bi bili idealno upareni, postojalo bi i pojačanje srednje vrednosti a_s , dok bi formula 11.34 glasila

$$v_i = a_d \cdot v_d + a_s v_s = a_d (v_1 - v_2) + a_s \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) \quad (11.35)$$

Iz formule 11.32 vidi se da je superpozicijom dobijen izlazni napon u formi $v_i = k_1 v_1 + k_2 v_2$. Kako je

$$v_i = a_d (v_1 - v_2) + a_s \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) = (a_d + a_s / 2) v_1 + (-a_d + a_s / 2) v_2 = k_1 v_1 + k_2 v_2, \quad (11.36)$$

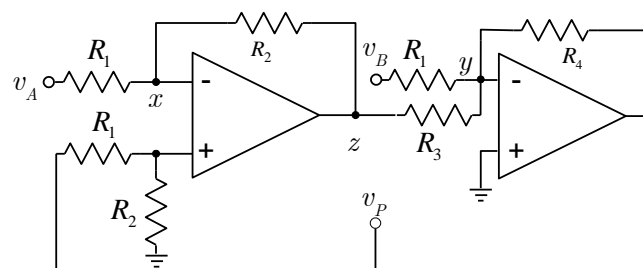
proizilazi da se vrednosti za diferencijalno i pojačanje srednje vrednosti mogu dobiti iz superpozicionih koeficijenata kao

$$\begin{aligned} a_s &= k_1 + k_2 \\ a_d &= \frac{k_1 - k_2}{2} \end{aligned} \quad (11.37)$$

Prethodne formule su univerzalne i mogu se upotrebiti za bilo koji pojačavač sa dva ulaza i jednim izlazom.

Primer 11.1

- Za kolo sa slike 11.14, odrediti $v_P = f(v_A, v_B)$ u funkciji datih otpornika.
- Ako su $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\text{k}\Omega$, $R_4 = 4\text{k}\Omega$ odrediti R_3 i k tako da je $v_P = k(v_A - v_B)$.



Slika 11.14: Slika koja odgovara primeru 11.1

Rešenje

a) kako se radi o kaskadnoj vezi diferencnog pojačavača i sabirača važi

$$v_p = -\frac{R_4}{R_1}v_B - \frac{R_4}{R_3}v_z; \quad v_z = \frac{R_2}{R_1}(v_p - v_A).$$

Kombinacijom te dve jednačine se dobija

$$v_p = -\frac{R_4}{R_1}v_B - \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}(v_p - v_A) = \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}v_A - \frac{R_4}{R_1}v_B - \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}v_p$$

Rešavanjem prethodne jednačine po izlaznom naponu dobija se konačan izraz

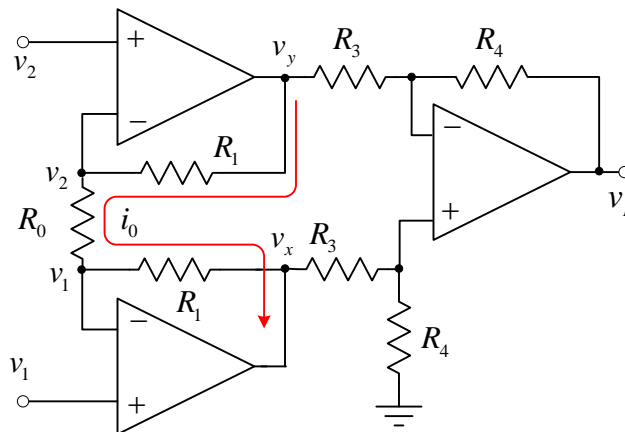
$$v_p + \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}v_p = \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}v_A - \frac{R_4}{R_1}v_B \Rightarrow v_p = \frac{\frac{R_4}{R_1}\left(\frac{R_2}{R_3}v_A - v_B\right)}{1 + \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}}$$

b)

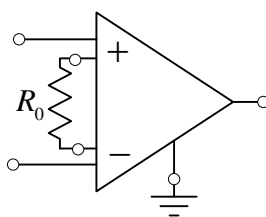
$$\text{Ako je } R_3 = R_2 \Rightarrow v_p = \frac{\frac{R_4}{R_1}(v_A - v_B)}{1 + \frac{R_4}{R_1}}; \quad k = \frac{R_4}{R_4 + R_1} = 4/5$$

11.3.8 Instrumentacioni pojačavač

Nedostatak diferencnog pojačavača je konačna ulazna otpornost. Kada se baferišu ulazi diferencnog pojačavača neinvertujućim pojačavačima dobija se beskonačna ulazna otpornost ali i dodatno pojačanje. Na slici 11.15 prikazana je šema jednog takvog pojačavača koji je poznat pod nazivom *instrumentacioni pojačavač*. Pojačavači tog tipa se intenzivno koriste, standardizovani su i postoje na tržištu kao integrisana kola, sa električnim simbolom kao na slici 11.16. Osim otpornika R_0 ostale komponente su integrisane i fabrički uparene. Otpornik R_0 dodaje korisnik i sa njegovom vrednošću se bira ukupno pojačanje kola.



Slika 11.15. Instrumentacioni pojačavač



Slika 11.16: Komercijalni instrumentacioni pojačavač

Uočimo da se instrumentacioni pojačavač sastoji od dva stepena, prvi stepen obezbeđuje baferisanje ulaznih signala, dok je drugi stepen diferencni pojačavač. Diferencni pojačavač generiše napon na izlazu koji je jednak

$$v_i = \frac{R_4}{R_3} (v_x - v_y) \quad (11.38)$$

U prvom stepenu postoje dva operaciona pojačavača, oba sa NPS tako da je obezbeđeno da se na krajevima otpornika R_0 nalaze ulazni potencijali, čime je i definisana struja kroz njega:

$$i_0 = \frac{v_2 - v_1}{R_0} \quad (11.39)$$

Kako ta struja ne može da ima komponentu koja dolazi iz priključaka operacionih pojačavača, kompletna prolazi kroz otpornike R_1 , i na njima pravi pad napona. Na osnovu tog pada napona sleduje:

$$\begin{aligned} v_y &= v_2 + R_1 i_0 = v_2 + R_1 \frac{v_2 - v_1}{R_0} = v_2 - R_1 \frac{v_1 - v_2}{R_0} \\ v_x &= v_1 - R_1 i_0 = v_1 - R_1 \frac{v_2 - v_1}{R_0} = v_1 + R_1 \frac{v_1 - v_2}{R_0} \end{aligned} \quad (11.40)$$

Razlika potencijala $v_x - v_y$ se dobija kombinacijom prethodne dve jednačine:

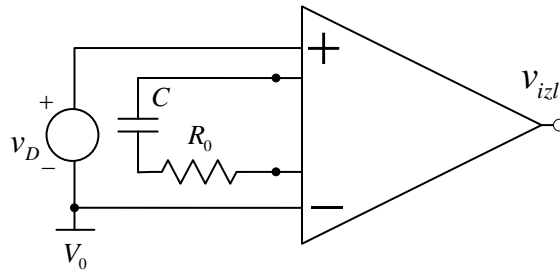
$$v_x - v_y = v_1 + R_1 \frac{v_1 - v_2}{R_0} - \left(v_2 - R_1 \frac{v_1 - v_2}{R_0} \right) = \left(1 + \frac{2R_1}{R_0} \right) (v_1 - v_2) \quad (11.41)$$

Zamenom prethodnog izraza u jednačinu 11.38 dobija se pojačanje instrumentacionog pojačavača

$$v_i = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_1}{R_0} \right) (v_1 - v_2) = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_1}{R_0} \right) v_d \Rightarrow a_d = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_1}{R_0} \right) \quad (11.42)$$

Primer 11.2

Na slici 11.17 je prikazan instrumentacioni pojačavač gde je otpornik $R_0 = 2\text{k}\Omega$ dok su ostali otpornici u kolu $R = 1\text{k}\Omega$. Ako je ispunjeno da $C \rightarrow \infty$, a da je $v_D = 10\text{mV} + 10\text{mV} \cos \omega t$, odrediti $v_{izl}(t)$.



Slika 11.17. Instrumentacioni pojačavač iz primera 11.2.

Rešenje:

$$\left. \begin{aligned}
 a_{dDC} &= \left(1 + 2 \frac{R}{\infty}\right) \left(\frac{R}{R}\right) = 1 \\
 a_{dAC} &= \left(1 + 2 \frac{R}{R_0}\right) \left(\frac{R}{R}\right) = 2
 \end{aligned} \right\} v_{izl} = v_D(t) = 10\text{mV} + 20\text{mV} \cos \omega t$$

12 Operacioni pojačavači sa jednostrukim napajanjem

U savremenim IoT sistemima od posebnog je značaja ekonomičnost potrošnje. Hradverski mali IoT čvorovi su bazirani na mikrokontrolerima i pratećom elektronikom niske potrošnje, a napajaju se ili iz jedne baterije za napajanje ili na neki drugi način obezbeđuju energiju. Kako je obrada signala sa senzora jedan od osnovnih zadataka IoT čvora, operacioni pojačavači niske potrošnje sa napajanjem od maksimalno 5V su neizostavni deo pretećeg hardvera.

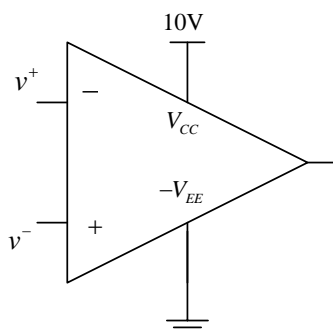
Ovo poglavlje se bavi aplikacijama koje koriste operacione pojačavače sa jednim napajanjem, razmatra njihovu portabilnost i tehnike realizacije. Dizajn koji koristi operacione pojačavače sa jednim napajanjem je komplikovaniji od dizajna koji koristi dvostruko napajanje, ali je interesovanje za njim izuzetno veliko zbog bolje portabilnosti.

12.1 Problem napona srednje vrednosti kod operacionih pojačavača sa jednostrukim napajanjem

Napon srednje vrednosti operacionog pojačavača, formula 12.1 može da se definiše kao srednja vrednost na ulazima pojačavača. saglasno slici 12.1.

$$v_s = \frac{v^+ + v^-}{2} \approx v^+ = v^- \quad (12.1)$$

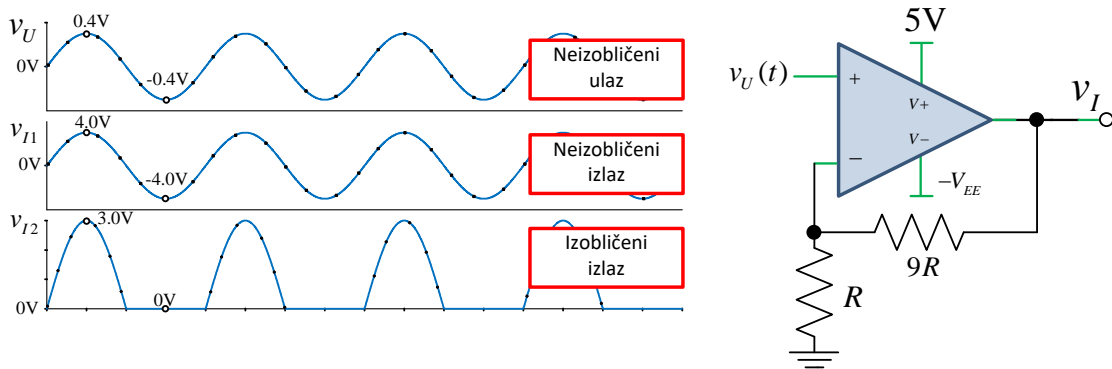
U slučaju operacionih pojačavača povezanih u NPS, vrednosti ulaza su praktično na istom potencijalu, sa veoma malim odstupanjem, pa se efektivno ovaj napon vidi na bilo kom od ulaza.



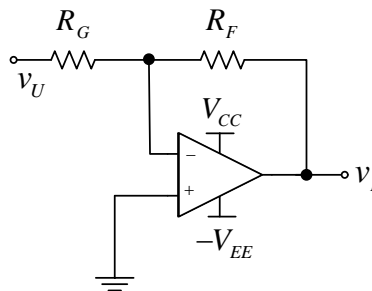
Slika 12.1 Napon srednje vrednosti operacionog pojačavača

Ono što je bitno za rad operacionog pojačavača u linearnom režimu je opseg napona njegove srednje vrednosti koji je definisan u odnosu na negativno i pozitivno napajanje operacionog pojačavača. Kada srednja vrednost ulaza operacionog pojačavača izađe iz opsega napona srednje vrednosti napajanja, kompletno kolo može postati nelinearno. Primer je ilustrovan na slici 12.2. Neinvertujući pojačavač ima pojačanje 10 i sa dvostrukim napajanjem od ± 5 V, napon srednje vrednosti i napajanja i operacionog pojačavača su jednaki nuli. Tada se ulazni signal amplitude 0.4 V ispravno pojača i na izlazu je dobijen neizobličena signal jednak desetostrukoj vrednosti ulaznog signala. Uoliko je negativno napajanje operacionog pojačavača jednako 0 V, doći će do odsecanja negativnog dela pobudnog napona o pojačanja samo pozitivnog dela pobudnog napona.

Većina prenosivih sistema kao i mnogi drugi stacionarni sistemi, realizuju se korišćenjem jedne baterije za napajanje. Sa druge strane, dizajn sa dvostruko napajanim operacionim pojačavačima je pravolinijski, jer su vrednosti ulaza i izlaza operacionog pojačavača referencirane u odnosu na srednji izvod izvora napajanja koji je vezan na masu. U većini aplikacija sa dvostrukim napajanjem signali ulaza operacionih pojačavača su takodje referncirani u odnosu na masu. Dakle, sa jednim ulazom operacionog pojačavača koji je vezan na masu, kao što je primerom prikazano na slici 12.3, nema potrebe za razmatranjem problema koji se odnose na napon srednje vrednosti.

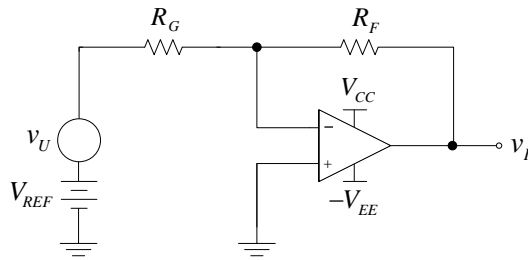


Slika 12.2 Ilustracija nelinearnog režima rada operacionog pojačavača



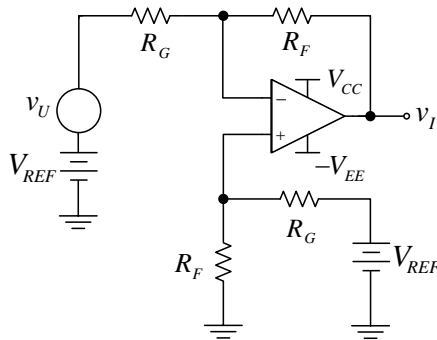
Slika 12.3: Invertujući pojačavač sa dvostrukim napajanjem

Kada signal na ulazu nije referenciran u odnosu na masu, kao što je prikazano na slici 12.4, i referentni napon se pojačava i određuje vrednost izlaznog napona, što je dato jednačinom 12.2. U nekim slučajevima je ova situacija prihvatljiva. Međutim, češći je slučaj da je potrebno eliminisati komponentu nekorisnog signala u izlaznom naponu. U takvim situacijama koristi se dodatna naponska referenca u drugoj ulaznoj grani operacionog pojačavača i ona eliminiše pojavu preslikanog referentnog napona u izlaznom signalu (slika 12.5). Napon srednje vrednosti na ulazu operacionog pojačavača je u tom slučaju jednak $V_{REF} R_F / (R_G + R_F)$. Pojačavači sa povratnom spregom ne propuštaju napon srednje vrednosti jer njihovo ulazno kolo uključuje diferencijalni pojačavač (izabran sa ciljem da ne propušta napon srednje vrednosti). Iz tog razloga je izlazni napon kola sa slike 12.5 je dat jednačinom 12.3.



Slika 12.4 Kolo sa operacionim pojačavačem, dvostrukim napajanjem i jednosmernom referencom na ulazu

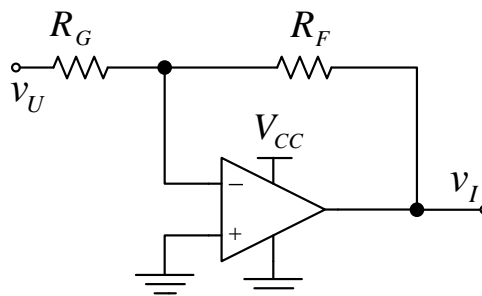
$$v_I = -(v_U + V_{REF}) \frac{R_F}{R_G} \quad (12.2)$$



Slika 12.5 Kolo sa operacionim pojačavačem, dvostrukim napajanjem i eliminacijom napona srednje vrednosti iz izlaznog signala

$$v_I = -v_U \frac{R_F}{R_G} \quad (12.3)$$

Kada su ulazni signali referencirani u odnosu na masu, kola operacionih pojačavača sa jednim napajanjem *imaju veliki ulazni napon srednje vrednosti*. Slika 12.6. prikazuje opciju sa jednim napajanjem u kolu pojačavača čiji je ulazni napon referenciran u odnosu na masu. Ulazni napon u ovoj situaciji nije referentan u odnosu na sredinu radnog opsega kao u slučaju aplikacija sa dvostrukim napajanjem, već je referenciran u odnosu na donju granicu radnog opsega. Ovo kolo ne radi u linearnom režimu kada je ulazni napon pozitivan jer bi izlazni napon u tom slučaju bio negativan, što je nemoguće postići sa pozitivnim napajanjem. Većina operacionih pojačavača nije napravljena da ispravno radi kada su ulazni naponi jednaki naponima napajanja, tako da i u slučaju malih negativnih ulaznih napona rad kola nije idealan.



Slika 12.6 Kolo sa operacionim pojačavačem i jednim napajanjem

Učestali zahtevi za realizacijama gde su ulazi vezani na masu ili neki drugi referentni napon, otežavaju dizajn kola sa operacionim pojačavačima sa jednim napajanjem. U nastavku će biti izložena procedura koja obezbeđuje funkcionalno rešenje.

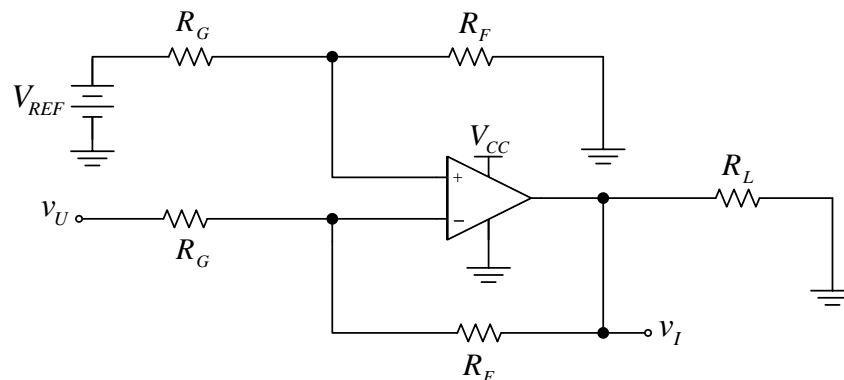
U nastavku izlaganja, ukoliko nije drugačije naznačeno, u svim narednim primerima operacioni pojačavači se napajaju iz jedne baterije za napajanje. Ovo napajanje može biti povezano između pozitivne reference i mase ili mase i negativne reference, ali sve dok je polaritet napajanja ispravan, vezivanje ne utiče na rad kola. Upotreba jednog napajanja ograničava polaritet izlaznog napona. Kada je napon napajanja, izlazni napon je u idealnom slučaju ograničen na opseg $0 \leq v_i \leq 10 \text{ V}$. Ovo ograničenje isključuje negativne izlazne napone, ali ne isključuje negativne ulazne napone kola, sve dok napon na ulazu operacionog pojačavača ne postane negativan.

U situacijama kada postoji mogućnost da napon na ulazu operacionog pojačavača postane negativan potrebno je preduzeti mere zaštite. Ulazi operacionog pojačavača mogu biti osetljivi i takva situacija može prouzrokovati proboj ulaznih tranzistora operacionog pojačavača zbog inverzne polarizacije ulaznih priključaka.

Takođe, u situacijama kada su ulazni naponi u kolo i naponi napjanja kola suprotnog polariteta, potrebno je osigurati da u svim mogućim uslovima pokretanja kola ne dolazi do inverzije polariteta ulaza operacionog pojačavača.

12.2 Analiza problema rada sa jednostrukim napajanjem

Složenost dizajna aplikacija sa operacionim pojačavačima sa jednim napajanjem ilustrovana je sledećim primerom. Opseg ulaznog i izlaznog napona mnogih operacionih pojačavača je strožije ograničen od napona napajanja, ali izborom rail-to-rail operacionog pojačavača problemi ulaznog/izlaznog opsega su svedeni na minimum. Primer invertujućeg pojačavača je prikazan na slici 12.7.



Slika 12.7: Invertujući pojačavač sa jednim naponom napjanja (jednostrukim napajanjem)

Pošto je kolo sa slike 12.7 strukturalno posmatrano diferencni pojačavač, napon na njegovom izlazu je jednak

$$v_I = (V_{REF} - v_U) \frac{R_F}{R_G} . \quad (12.4)$$

Sve dok je otpornost potrošača velika, ona se može zanemariti u analizi, međutim ova otpornost kada je mala može prouzrokovati neke sekundarne efekte, poput ograničavanja opsega izlazne struje pojačavača. Formula 12.5 se dobija izjednačavanjem napona V_{REF} i v_U , po čemu bi izlazni napon kola trebao da bude jednak nuli, bez obzira na ulazne napone. U praksi, ovakvo kolo uglavnom ima mali izlazni napon koji je veći od nule.

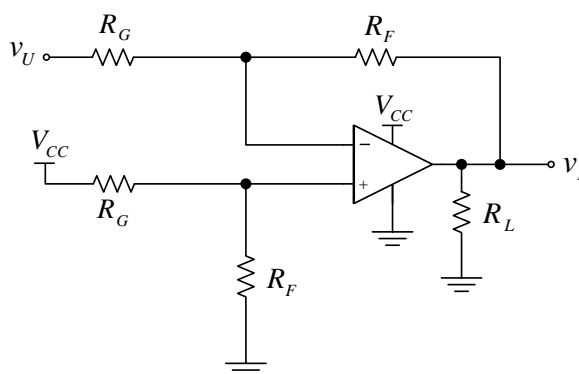
$$v_I = (V_{REF} - v_U) \frac{R_F}{R_G} = (v_U - v_U) \frac{R_F}{R_G} = 0 \quad (12.5)$$

Kada je $V_{REF} = 0$, i $v_I = -v_U R_F / R_G$, tada postoje dva moguća rešenja jednačine 12.4. Prvo rešenje, kada je v_U bilo koji pozitivan napon, v_I treba da bude negativan napon. Kolo ne može postići negativni napon sa pozitivnim napajanjem, pa izlaz dostiže zasićenje na donjoj granici opsega napajanja: $v_U \geq 0 \Rightarrow v_I = 0$. Drugo rešenje se dobija kada se dovodi negativan napona v_U , izlaz je u normalnom opsegu: $v_U \leq 0 \Rightarrow v_I = |v_U| R_F / R_G$.

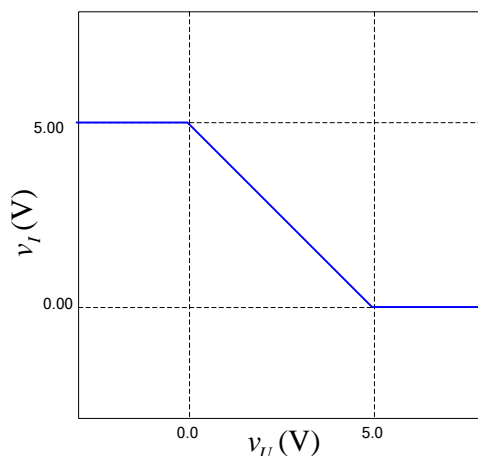
Kada se V_{REF} izjednači sa naponom napajanja V_{CC} , dobijamo jednačinu 12.6. Prema toj jednačini, kada je v_U negativan, napon v_I bo trebao da bude veći od V_{CC} što je nemoguće, pa je izlaz operacionog pojačavača u pozitivnom zasićenju. Kada je v_U pozitivan napon, kolo se ponaša kao invertujući pojačavač:

$$v_I = (V_{CC} - v_U) \frac{R_F}{R_G}. \quad (12.6)$$

Pod uslovima jednačine 12.6 kolo je prikazano na slici 12.8. i grafik njegove prenosne karakteristike prikazan je na slici 12. 9. Parametri kola su $V_{CC} = 10 \text{ V}$, $R_G = R_F = 100 \text{ k}\Omega$, $R_L = 10 \text{ k}\Omega$.



Slika 12.8: Invertujući pojačavač sa ofsetom na ulazu



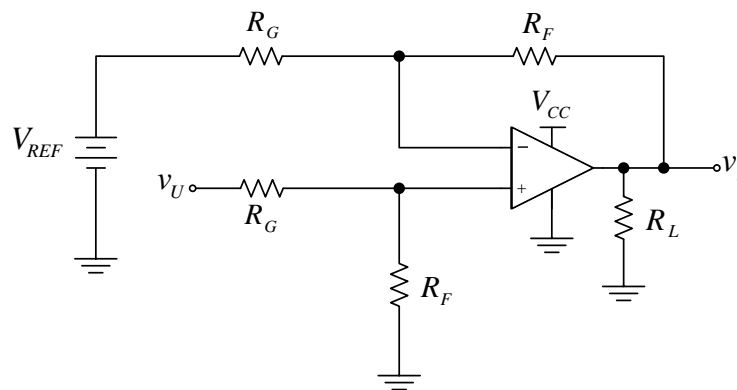
Slika 12.9 Prenosna karakteristika invertujućeg pojačavača

Modifikovano kolo neinvertujućeg pojačavača prikazano je na slici 12.10. Kako se i ovde radi o diferencnom pojačavaču napon na izlazu je jednak

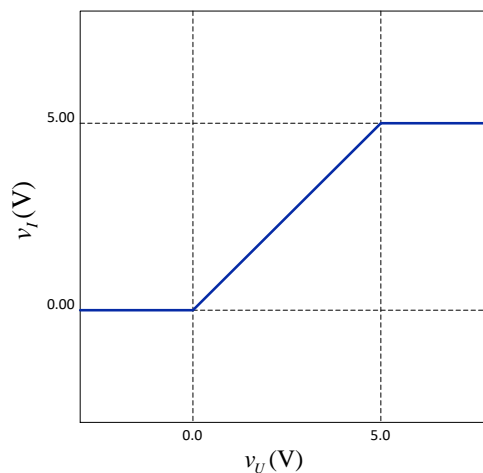
$$v_I = (v_U - V_{REF}) \frac{R_F}{R_G} \quad (12.7)$$

Kada je $V_{REF} = 0$, izlazni napon je $v_I = v_U R_F / R_G$, a moguća su dva rešenja. Prvo rešenje je kada je napon v_U negativan, a tada i v_I mora biti negativno. Kako kolo sa nenegativnim napajanjem ne može postići negativan izlazni napon, izlaz je u zasićenju na donjoj granici opsega napajanja: $v_U \leq 0 \Rightarrow v_I = 0$. Drugo rešenje se dobija pri $v_U \geq 0$. Tada izlazni napon obuhvata normalni opseg vrednosti i važi da je $v_I = v_U$.

Neinvertujuće kolo pojačavača je prikazano na slici 12.10, pri čemu je $V_{CC} = 5\text{ V}$, $R_G = R_F = 100\text{ k}\Omega$, $R_L = 10\text{ k}\Omega$ i $V_{REF} = 0$. Jednosmerna prenosna karakteristika za ovo kolo prikazana je na slici 12.11.



Slika 12.10 Neinvertujući pojačavač sa ofsetom na ulazu



Slika 12.11 jednosmerna prenosna karakteristika neinvertujućeg pojačavača

12.3 Algoritamsko generisanje kola sa jednostrukim napajanjem

Postoji veliki broj realizacija invertujućih i neinvertujućih pojačavačkih kola koja se mogu modifikovati da ispravno rade u uslovima jednostrukog napajanja. U zavisnosti od

primene, svaka realizacija ima prednosti i mane, zbog čega ih u praksi inženjeri analiziraju u potrazi za onom koja najbolje rešava problem. Umesto analiziranja svakog mogućeg kola, može se upotrebiti jednostavan generički sistem jednačina u koji se uvode željeni parametri koje kolo treba da zadovolji, i čijim se rešavanjem dobija željena prenosna karakteristika. Kada je poznat oblik prenosne karakteristike, sintetizuje se kolo koje odgovara istoj.

Jednosmerna prenosna karakteristika koja se sintetizuje treba da bude linearna funkcija data jednačinom 12.8.

$$y = \pm mx \pm b \quad (12.8)$$

U zavisnosti od znaka koeficijenta m , i odsečka na ordinati b , funkciju 12.8 možemo razdvojiti na četiri posebna slučaja:

$$v_I = +mv_U + b \quad (12.9)$$

$$v_I = +mv_U - b \quad (12.10)$$

$$v_I = -mv_U + b \quad (12.11)$$

$$v_I = -mv_U - b \quad (12.12)$$

Ove jednačine se mogu implementirati sa četiri različite hardverske realizacije pri čemu znak parametara m i b određuje vrstu kola koje odgovara rešenju. Pošto u svakoj jednačini postoje dve nepoznate m i b , potrebno je formirati sistem jednačina 2x2 na osnovu dva pogodno odabrana uređena para (v_U, v_I) koja pripadaju željenoj prenosnoj karakteristici.

Oblik prenosne karakteristike se zadaje prema potrebama problema koji se rešava. Na primer, u nekoj aplikaciji je potrebno prilagoditi izlazni napon senzora koji je u opsegu od 0.1 V do 0.2 V na opseg ulaznog napona od 1V do 4 V. U tom slučaju tačke koje treba da pripadaju prenosnoj karakteristici $(v_I = 1 \text{ V}, v_U = 0.1 \text{ V})$, $(v_I = 4 \text{ V}, v_U = 0.2 \text{ V})$ ubacuju se u jednačinu 12.9, kao što je prikazano u jednačinama 12.13 i 12.14. Time se dobija sistem jednačina čijim rešavanjem se dobijali vrednosti m i b .

$$1 = m(0.1) + b \quad (12.13)$$

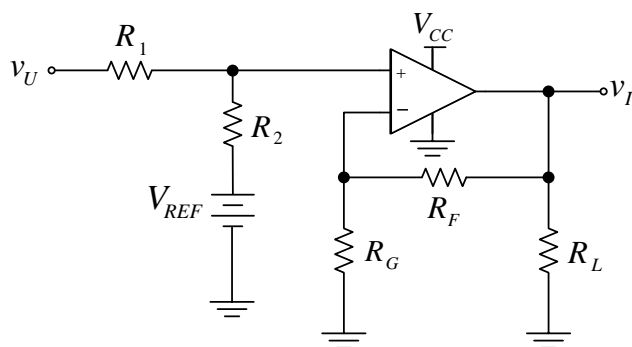
$$4 = m(0.2) + b \quad (12.14)$$

Rešavanjem sistema dobijaju se vrednosti parametara $m = 30$ i $b = -2$. Zamenom izračunatih parametara u jednosmernu prenosnu karakteristiku dobija se da je $v_I = 30v_U - 2$.

Rešenje odgovara obliku jednačine 12.10 iako je kao polazna osnova korišćena jednačina 12.9. Razlog je taj što ulazni podaci specifikacije problema određuju znak parametara m i b , pa se finalna forma prenosne karakteristike dobija tek na kraju analize.

Poslednji korak je sinteza kola koje odgovara dobijenim parametrima. U nastavku su predložena rešenja za sva četiri oblika jednosmerne prenosne karakteristike.

Realizacija kola koje odgovara slučaju za oblik jednačine 12.9 je prikazana na slici 12.12.



Slika 12.12 Realizacija kola za oblik prenosne karakteristike $v_I = +mv_U + b$

Korišćenjem formule za razdelnik napona i principa superpozicije dobija se jednačina 12.15 koja definiše jednosmernu prenosnu karakteristiku kola:

$$v_I = v_U \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{R_F + R_G}{R_G} \right) + V_{REF} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{R_F + R_G}{R_G} \right) \quad (12.15)$$

Izjednačavanjem sa jednačinom oblika 12.9 dobijaju se izrazi za m i b u jednačinama 12.16 i 12.17.

$$m = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{R_F + R_G}{R_G} \right) \quad (12.16)$$

$$b = V_{REF} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{R_F + R_G}{R_G} \right) \quad (12.17)$$

Primer: 12.1

Projektovati pojačavač sa jednostrukim napajanjem ako su specifikacije kola $v_I = 1 \text{ V}$ za $v_U = 0.01 \text{ V}$, $v_I = 4.5 \text{ V}$ za $v_U = 1 \text{ V}$. $R_L = 10 \text{ k}\Omega$, tolerancije otpornika su 5%, i $V_{CC} = 5 \text{ V}$. Ne postoji dodatna naponska referenca.
Rešenje:

Kako ne postoji dodatna naponska referenca, onda se u tu svrhu koristi V_{CC} kao referentni ulaz, tj. $V_{REF} = 5 \text{ V}$. Vrednosti ulaznih i izlaznih napona iz specifikacije se zamenjuju u formulu za odgovarajuću prenosnu karakteristiku što je opisano sledećim sistemom jednačina:

$$1 = m(0.01) + b$$

$$4.5 = m(0.1) + b$$

Parametar b se lako dobija na osnovu jednačine $100 = m(1.0) + 100b$:

$$b = \frac{95.5}{99} = 0.9646$$

a zatim se odredi parametar m

$$m = \frac{1-b}{0.01} = \frac{1-0.9646}{0.01} = 3.535$$

Sračunati parametri m i b se koriste za određivanje otpornika u kolu. Jednačine 12.16 i 12.17 se rešavaju za izraz $(R_F + R_G)/R_G$ a potom se rezultat izjednačava:

$$\frac{R_F + R_G}{R_G} = m \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) = \frac{b}{V_{CC}} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \quad (12.18)$$

Transformacijom prethodne jednačine dobija se

$$R_2 = \frac{3.535}{0.9646} R_1 = 18.316 R_1$$

Za navedene tolerancije otpornosti od 5% koje su zahtev za dizajn iz primera, usvojeno je $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, a time je dalje određena vrednost $R_2 = 183.16 \text{ k}\Omega$. Najbliža vrednost u granicama tolerancije od 5%, je $180 \text{ k}\Omega$. Time je rešen izbor otpornika $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 180 \text{ k}\Omega$. Razlika izabrane i izračunate vrednosti za otpornike proizveće grešku u jednosmernoj prenosnoj karakteristici kola, jer m i b neće imati vrednosti koje su prethodno izračunate. Otpornici sa vrednostima koje su približnije izračunatim vrednostima mogu se izabrati iz skala sa tolerancijom 1% ili 0.5%

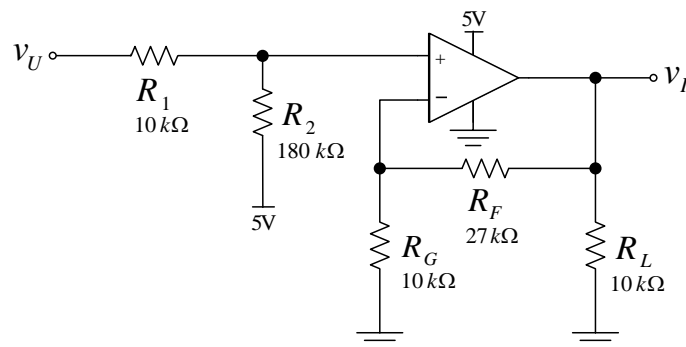
Iz leve strane jednačine 12.18 računaju se otpornosti R_F i R_G :

$$\frac{R_F + R_G}{R_G} = m \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) = 3.535 \left(\frac{180 + 10}{180} \right) = 3.73$$

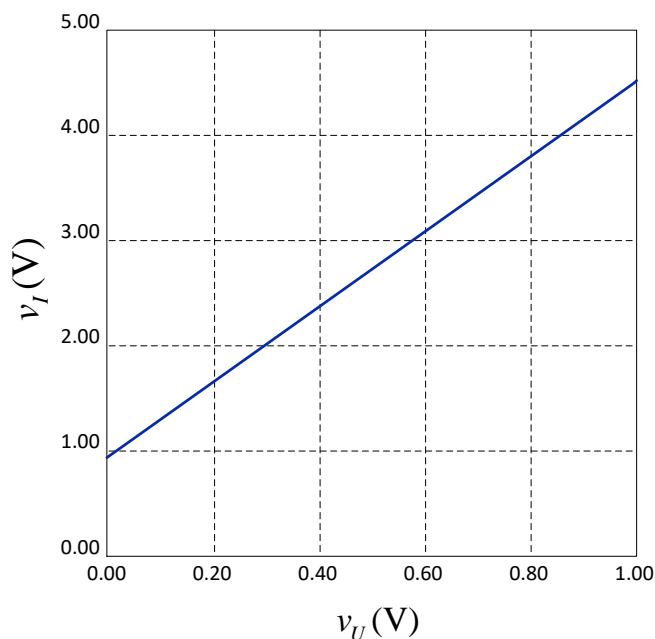
$$R_F = 2.73 R_G$$

Konačno, rezultujuće pojačanje kola je dato izrazom: $v_I = 3.5v_U + 0.97$. Za otpornost R_G odabrana je vrednost od $10 \text{ k}\Omega$ dok je za otpornik R_F izabrana vrednost $27 \text{ k}\Omega$ kao najbliža standardna vrednost sa tolerancijom od 5%. U ovoj situaciji takodje postoji neznatna greška zbog odabira standarde vrednosti otpornika.

Kolo sa izabranim vrednostima komponenti prikazano je na slici 12.13. dok je grafik jednosmerne prenosne karakteristike prikazan na slici 12.14.



Slika P12.13. Realizacija kola sa konkretnim vrednostima za oblik prenosne karakteristike $v_I = +mv_U + b$

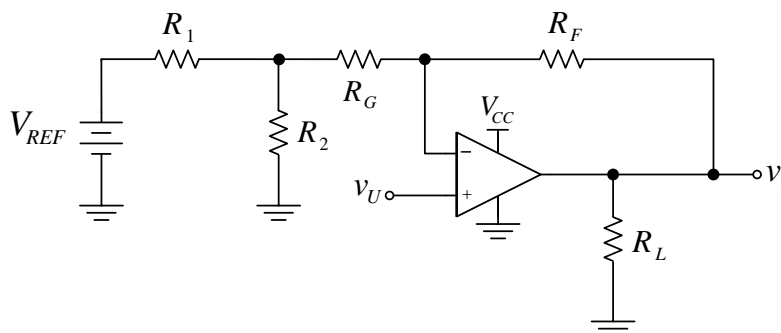


Slika P12.14 Grafik realizacije kola sa prenosnom karakteristikom $v_I = 3.5v_U + 0.97$

Prikazana jednosmerna prenosna karakteristika je prava linija, iylayni napon v_I preseca apcisu oko 0.98 V, a ne 1 V kako je zahtevano, što je odličan rezultat s obzirom na proizvoljan izbor komponenti. Različiti skupovi vrednosti komponenti imali bi različite nagibe zbog tolerancija otpornika.

Otpornici reda $k\Omega$ su izabrani proizvoljno. Ipak premale vrednosti otpornika bi znatno povećale struju u normalnom režimu rada pa bi došlo do toga da kolo ne radi zbog prekoračenja strujnog kapacitet operacionog pojačavača.

Realizacija kola koje odgovara drugom slučaju, jednačina 12.10, prikazana je na slici 12.15. Uprošćena jednačina prenosne karakteristike kola dobija se računanjem ekvivalentnog Tevenenog kola za deo kola između tačke spoja otpornika R_1 i R_2 i mase. Zamenom ekvivalentnog Tevenenovog kola, prenosna karakteristika se računa korišćenjem superpozicije, jednačina 12.19



Slika 12.15 Realizacija kola za oblik jednosmerne prenosne karakteristike $v_I = +mv_U - b$

$$v_I = v_U \left(\frac{R_F + R_G + R_1 \parallel R_2}{R_G + R_1 \parallel R_2} \right) - V_{REF} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{R_F}{R_G + R_1 \parallel R_2} \right) \quad (12.19)$$

Upoređivanjem jednačine 12.19 i jednačine 12.10 identifikuju se parametri m i b .

$$m = \frac{R_F + R_G + R_1 \parallel R_2}{R_G + R_1 \parallel R_2} \quad (12.20)$$

$$|b| = V_{REF} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{R_F}{R_G + R_1 \parallel R_2} \right) \quad (12.21)$$

Primer:12.2

Dizajnirati pojačavač sa jednostrukim napajanjem ako su specifikacije kola: $v_I = 1.5V$ za $v_U = 0.2V$, $v_I = 4.5V$ za $v_U = 0.5V$, $V_{REF} = V_{CC} = 5V$, $R_L = 10 k\Omega$, tolerancije otpornika su 5%.

Rešenje:

Sistem jednačina tražene prenosne karakteristike glasi:

$$\begin{aligned} 1.5 &= 0.2m + b \\ 4.5 &= 0.5m + b \end{aligned}$$

Iz ovog sistem jednačina dobijaju se vrednosti $b = -0.5$ i $m = 10$. Pod pretpostavkom da je $R_1 \parallel R_2 \ll R_G$ što se lako da ostvariti, pojednostavljuje se proračun traženih otpornika:

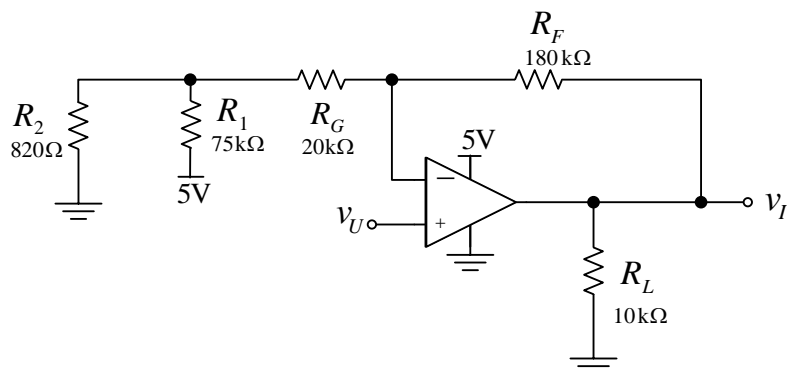
$$m = 10 = \frac{R_F + R_G}{R_G} \Rightarrow R_F = 9R_G$$

Ako izaberemo $R_G = 20 k\Omega$ onda je $R_F = 180 k\Omega$.

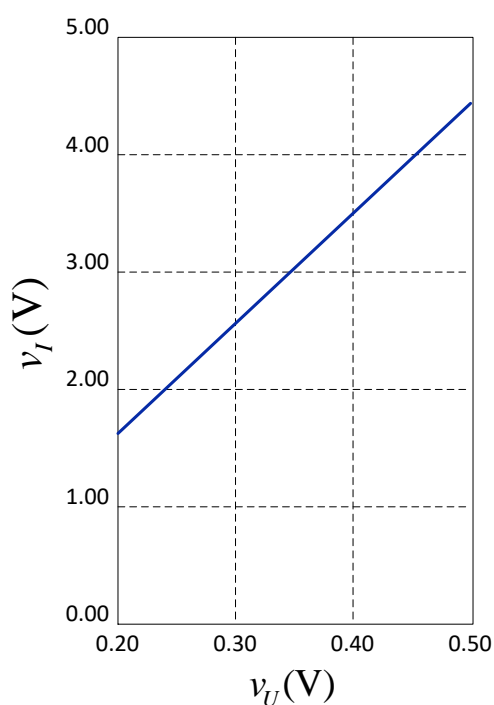
$$b = V_{CC} \frac{R_F}{R_G} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = 5 \frac{180}{20} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

$$R_1 = \frac{1 - 0.01111}{0.01111} R_2 = 89R_2$$

Izabrane otpornosti su $R_2 = 0.82 k\Omega$ i $R_1 = 72.98 k\Omega$. Pošto $72.98 k\Omega$ nije standardna vrednost otpornika tolerancije 5%, za njega je odabrana vrednost $75 k\Omega$. Razlika između izabrane i izračunate vrednosti R_1 ima oko 3% efekta na parametar b , i ova greška se pojavljuje u jednosmernoj prenosnoj karakteristici kao ofset, a ne kao greška nagiba. Ekvivalentna otpornost paralelne veze otpornika R_1 i R_2 je približno $0.82 k\Omega$ i to je mnogo manje od vrednosti R_G koja je $20 k\Omega$. Za R_2 je mogla biti izabrana manja vrednost, međutim to bi prouzrokovalo veća odstupanja od standardnih vrednosti za otpornike tolerancije 5% pri izboru vrednosti za R_1 . Kolo sa proračunatim vrednostima je prikazano na slici 12.16, a prenosna karakteristika za ovo kolo je prikazana na slici 12.17.

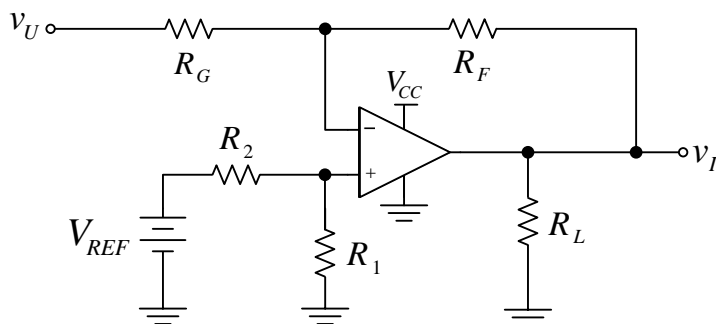


Slika P12.16 Realizacija kola sa konkretnim vrednostima za oblik prenosne karakteristike $v_I = +mv_U - b$



Slika P12.17 Grafik realizacije kola sa prenosnom karakteristikom $v_I = 10v_U - 0.5$

Realizacija kola koje odgovara trećem slučaju, forma jednačine 12.11 je prikazana na slici 12.18.



Slika 12.18 Realizacija kola za oblik jednosmerne prenosne karakteristike $v_I = -mv_U + b$

Jednačina prenosne karakteristike kola dobija se korišćenjem superpozicije:

$$v_I = -v_U \left(\frac{R_F}{R_G} \right) + V_{REF} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{R_F + R_G}{R_G} \right) \quad (12.22)$$

Poređenjem sa jednačinom 12.11, dobijaju se m i b parametri jednosmerne prenosne karakteristike:

$$|m| = \frac{R_F}{R_G} \quad \text{i} \quad b = V_{REF} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{R_F + R_G}{R_G} \right) \quad (12.23)$$

Primer:12.3

Projektovati pojačavač sa jednostrukim napajanjem ako su specifikacije kola: $v_I = 1V$ za $v_U = -0.1V$, $v_I = 6V$ za $v_U = -1V$, $V_{REF} = V_{CC} = 10V$, $R_L = 100 \text{ k}\Omega$, tolerancije otpornika su 5%

Rešenje:

Sistem jednačina jednosmerne prenosne karakteristike je opisan sledećim izrazima:

$$1 = (-0.1)m + b$$

$$6 = (-1)m + b$$

Iz ovog sistema dobijaju se vrednosti parametara $b = 0.444$ i $m = -5.56$. Na osnovu toga je

$$|m| = 5.56 = R_F / R_G \Rightarrow R_F = 5.56R_G$$

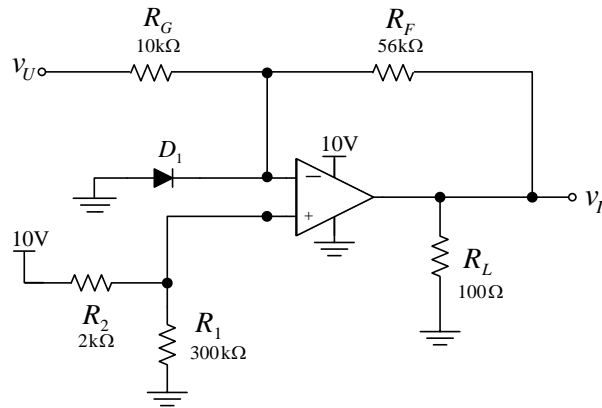
Ako se izabere $R_G = 10 \text{ k}\Omega$ tada je $R_F = 55.6 \text{ k}\Omega$ što nije jedna od standardnih vrednosti otpornosti sa tolerancijom 5%. Iz tog razloga je za R_F izabrana vrednost od $56 \text{ k}\Omega$. Kako je

$$b = V_{CC} \left(\frac{R_F + R_G}{R_G} \right) \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = 10 \left(\frac{56 + 10}{10} \right) \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

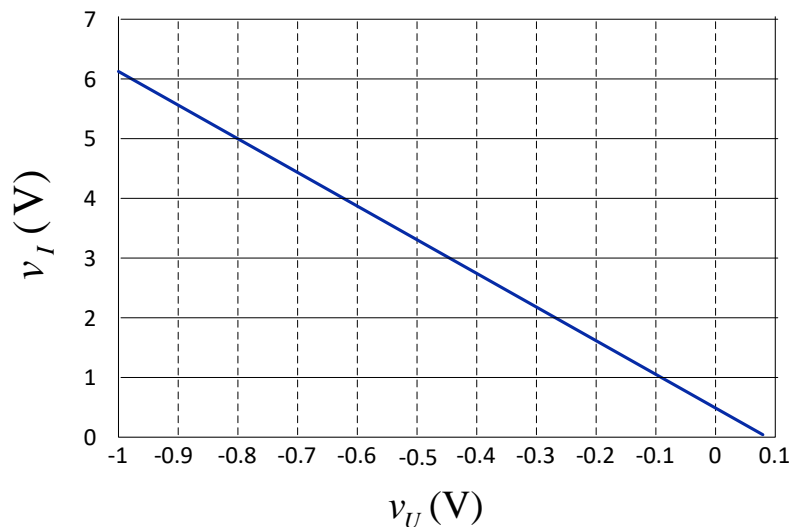
dobija se da je

$$R_2 = \frac{66 - 0.444}{0.444} R_1 = 147.64 R_1$$

Finalna prenosna karakteristika data je sa $v_I = -5.56v_U + 0.444$. Izabrane otpornosti su $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 295.28 \text{ k}\Omega$. S obzirom da otpornost od $295.28 \text{ k}\Omega$ nije standardna vrednost ya otpornike sa tolerancijom 5%, odabrana je otpornost od $300 \text{ k}\Omega$. Razlika između izabrane i izračunate vrednosti R_2 ima gotovo beznačajan efekat na parametar b . Kolo sa sračunatim vrednostima je prikazano na slici 12.19, a prenosna karakteristika za ovo kolo prikazana je na slici 12.20.



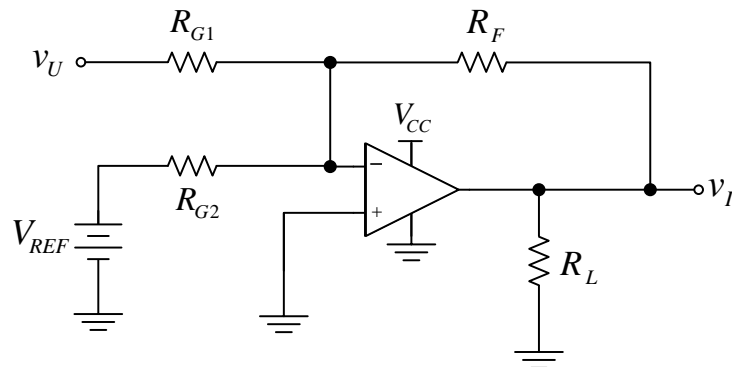
Slika P12.19: Realizacija kola sa konkretnim vrednostima za oblik prenosne karakteristike $v_I = -mv_U + b$



Slika P12.20 Grafik realizacije kola sa prenosnom karakteristikom $v_I = -5.56v_U + 0.444$

Sve dok kolo radi normalno, ne javljaju se problemi vezani za negativan ulazni napon u kolu, jer je invertujući ulaz operacionog pojačavača vezan na pozitivan napon. Pozitivni ulaz operacionog pojačavača je na naponu približne vrednosti 65mV, a normalan rad operacionog pojačavača održava invertujući ulaz operacionog pojačavača na istom naponu zbog pretpostavke da je napon greške nula. Kada se isključi V_{CC} , dok je na ulazu u kolo negativan napon, negativan napon se pojavljuje i na invertujućem ulazu operacionog pojačavača. Da se to ne bi događalo najjednostavnije rešenje je povezivanje silicijumske diode D_1 , na način prikazan na slici 12.20. Ukoliko takva zaštita nije dovoljna, izborom germanijumske ili Schottky diode, mogući negativan napon na ulazu pojačavača se limitira na oko -200 mV, što je dovoljno za veliku većinu operacionih pojačavača. Kao sledeći korak predostrožnosti, R_G se može podeliti na dva otpornika sa diodom umetnutom u njihov spoj. Ovim se postavlja otpornik koji ograničava struju između diode i invertujućeg ulaza operacionog pojačavača.

Kolo prikazano na slici 12.21 predstavlja rešenje četvrtog slučaja. Strukturno posmatrano kolo sa slike 12.21 je sabirač, tako da je jednačina koja opisuje prenosnu karakteristiku u obliku izraza 12.24.



Slika 12.21: Realizacija kola za oblik prenosne karakteristike $v_I = -mv_U - b$

$$v_I = -v_U \left(\frac{R_F}{R_{G1}} \right) - V_{REF} \left(\frac{R_F}{R_{G2}} \right) \quad (12.24)$$

Poređenjem sa jednačinom 12.12 dobijaju se parametri b i m :

$$|m| = \frac{R_F}{R_{G1}} \quad \text{i} \quad |b| = V_{REF} \frac{R_F}{R_{G2}} \quad (12.25)$$

Primer:12.4

Projektovati pojačavač sa jednostrukim napajanjem ako su specifikacije kola: $v_I = 1V$ za $v_U = -0.1V$, $v_I = 5V$ za $v_U = -0.3V$, $V_{REF} = V_{CC} = 5V$, $R_L = 10 \text{ k}\Omega$, tolerancije otpornika su 5%.

Rešenje:

Sistem jednačina za određivanje prenosne karakteristike je opisan je sledećim izrazima:

$$\begin{aligned} 1 &= (-0.1)m + b \\ 5 &= (-0.3)m + b \end{aligned}$$

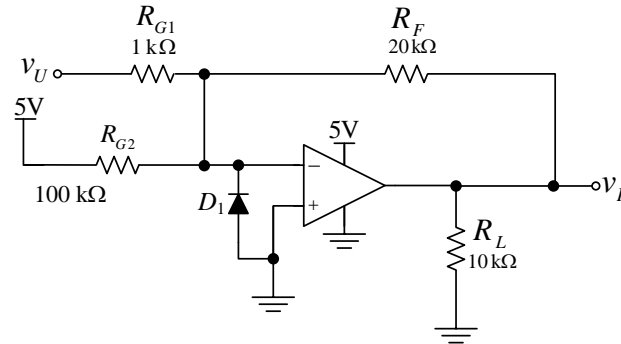
Iz ovog sistema dobijaju se vrednosti parametara $b = -1$ i $m = -20$. Izjednačavanjem dobijenih vrednosti sa formulom 12.24. dobija se:

$$|m| = 20 = \frac{R_F}{R_{G1}} \quad \text{i} \quad R_F = 20R_{G2}$$

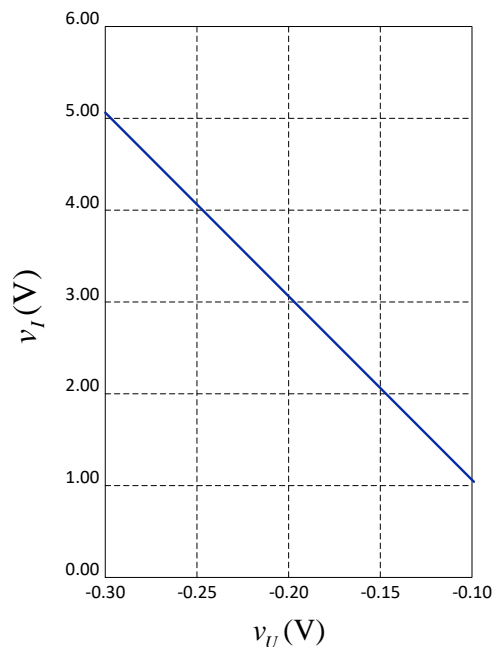
Ako se usvoji $R_{G1} = 1 \text{ k}\Omega$ onda je $R_F = 20 \text{ k}\Omega$. Sada je moguće odrediti vrednost otpornosti preostalog otpornika:

$$|b| = V_{CC} \frac{R_F}{R_{G2}} = 5 \frac{R_F}{R_{G2}} = 1 \Rightarrow R_{G2} = \frac{R_F}{0.2} = \frac{20}{0.2} = 100 \text{ k}\Omega$$

Finalna jednosmerna prenosna karakteristika je data jednačinom $v_I = -20v_U - 1$, a realizovano kolo sa konkretnim vrednostima je prikazano na slici 12.22, dok je prenosna karakteristika ovog kola prikazana na slici 12.23.



Slika P12.22 : Realizacija kola sa konkretnim vrednostima za oblik prenosne karakteristike $v_I = -mv_U - b$



Slika P12.23 Grafik realizacije kola sa prenosnom karakteristikom $v_I = -20v_U - 1$

Sve dok kolo radi u normalnom režimu, ne javljaju se problemi vezani za negativan ulazni napon u kolu, jer je invertujući ulaz operacionog pojačavača na pozitivnom naponu. Pozitivni ulaz operacionog pojačavača je na masi, a prilikom normalnog rada operacionog pojačavača ulazi operacionog pojačavača su na potencijalu mase zbog pretpostavke da je napon greške nula. Kada se napon napajanja V_{CC} isključi, dok je na ulazu u kolo negativan napon, napon na invertujućem ulazu operacionog pojačavača će takodje postati negativan. Da bi se sprečila pojava velikog negativnog napona na invertujućem ulazu, najjednostavnije rešenje je povezivanje diode D_1 tako da je njena katoda vezana na invertujući ulaz operacionog pojačavača dok je njena anoda na masi. U tom slučaju napon na invertujućem ulazu operacionog pojačavača, će zbog diode biti redukovano na bezbedan nivo. Izborom germanijumske ili Schottki tipa diode, ograničenje napona na ulaz će biti oko -200 mV.

12.4 Pregled postupka projektovanja pojačavača sa jednostrukim napajanjem

Nekada je dizajn sa jednim napajanjem smatran je tehnički ograničenim jer su stariji operacioni pojačavači imali ograničene performanse po pitnju efekta zasićenja. Ipak, svi noviji operacioni pojačavači imaju odlične parametre za primene sa jednim napajanjem. Kada se koriste na odgovarajući način, ovi operacioni pojačavači imaju rail-to-rail performanse koje pariraju i kolima sa dvostrukim napajanjem. Dizajn kola sa operacionim pojačavačem koji se napaja sa jednim napajanjem obično uključuje neku vrstu kompromisa, i zbog toga zahteva više razmišljanja. Preporučena procedura dizajna kola sa operacionim pojačavačem sa jednim napajanjem je sledeća:

- Zameniti podatke iz specifikacije u sistem jednačina da bi se odredili m i b (nagib i presek prave na ordinati).
- Vrednosti m i b određuju oblik kola.
- Odabrati konfiguraciju kola koja odgovara obliku prenosne karakteristike.
- Koristeći jednačine kola za odabranu konfiguraciju kola, izračunati vrednosti otpornika.
- Ispitati ponašanje kola u nestandardnim radnim uslovima (isključivanje napajanja pojačavača dok je napajanje ostatka kola uključeno, ulazi u kolo su preko/ispod opsega itd.).
- Dodati zaštitne komponente po potrebi.

Literatura:

1. [Osnovi elektronike - skripta prof. dr Miodraga Popovića](#)
2. Slavoljub Marjanović, *Elektronika linearnih kola i sistema*, Akademska misao, Beograd, 2002.
3. Spasoje Tešić, Dragan Vasiljević, *Osnovi elektronike*, Građevinska knjiga, Beograd, 2000.
4. A. S. Sedra and K. C. Smith, *Microelectronic circuits*, The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, 2019.
5. Radivoje Đurić, *Osnovi elektronike zbirka rešenih problema*, Akademska misao, Beograd, 2017.
6. Radivoje Đurić, *Zbirka zadataka iz analogne elektronike*, Grafos internacional, Pančevo, 2004.
7. Tobin, Paul, *PSpice for Circuit Theory and Electronic Devices*, Morgan Claypool publishers, April 2007.
8. Branko D. Popović, *Osnovi elektrotehnike 1,2,3*, Građevinska knjiga Beograd, 1986
9. Antonije R. Đorđević, *Osnovi elektrotehnike*, Beograd 2016
10. Texas Instruments, *Amplifiers and Comparators Data Book*, SLOD002, Texas Instrumets inc, Dallas 2001.
11. Daryl Janzen, *Introduction to Electricity, Magnetism, and Circuits*, online: <https://openpress.usask.ca/physics155>
12. Milan Ponjavic, *Zbirka zadataka iz signala i sistema*, Akademska misao, 2006
13. Milan Ponjavić, Radivoje Đurić, *Osnovi analogne elektronike, priručnik za laboratorijske vežbe*, Beograd 2015